

Autoreferat - podsumowanie aktywności i osiągnięć naukowych

1 Dane kontaktowe

dr inż. Sławomir Milewski

Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej

Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej

ul. Warszawska. 24, 31-155 Kraków, Polska

adres mailowy: s.milewski@L5.pk.edu.pl

numer telefonu: 506-307-797

2 Edukacja

1. **Dr inż.**, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej, Kraków, 25-03-2009, dyscyplina: mechanika, praca doktorska: "Higher Order Approximation, provided by correction terms, in the Meshless Finite Difference Method - applications in mechanics" (pol. "Aproksymacja podwyższonego rzędu w bezsiatkowej metodzie różnic skończonych oparta na członach korekcyjnych - zastosowania w mechanice"), promotor: prof. dr hab. inż. Janusz Orkisz, recenzenci: prof. dr hab. inż. Witold Cecot, prof. dr hab. inż. Leszek Demkowicz.
2. **Mgr inż.**, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej, Kraków, 23-10-2004, praca magisterska: "Metoda różnic skończonych wyższego rzędu i jej zastosowania w jednowymiarowych problemach brzegowych mechaniki", promotor: prof. dr hab. inż. Janusz Orkisz, recenzent: dr hab. inż. Wojciech Karmowski, prof. PK.

3 Kariera akademicka i naukowa

1. Od 2011.05.01 do chwili obecnej - adiunkt naukowo-dydaktyczny, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej.
2. Od 2008.10.01 do 2011.04.30 - asystent naukowo-dydaktyczny, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej.
3. Od 2003.10.01 do 2004.09.30 - asystent stażysta, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej.

4 Osiągnięcie naukowe

Osiągnięcie naukowe, stanowiące znaczny wkład w rozwój dyscypliny **budownictwo** i uzasadniające wszczęcie postępowania habilitacyjnego zgodnie z art. 16 ust. 2 ustawy z 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki opiera się na cyklu publikacji, tematycznie powiązanych, pod zbiorczym tytułem

**"Rozwijanie odpowiednich kombinacji metod typu deterministycznego i
stochastycznego do numerycznej analizy wybranych problemów termicznych i
mechanicznych"**

Cykl składa się z 11 publikacji, wymienionych i przedstawionych poniżej w sposób szczegółowy. Publikacje są posortowane zgodnie z datą publikacji, poczynając od najnowszych. Dla każdej pozycji z cyklu podano następujące dane: imię i nazwisko autora (autorów), rok wydania, tytuł, czasopismo,



tom (wydanie): liczba stron, IF (*Impact Factor*, współczynnik wpływu, przyznawany czasopismom z tzw. "Listy Filadelfijskiej", czyli znajdującym się w wykazie *Journal Citation Report* (JCR)) oraz punkty przyznane przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego (MNiSW) (obie wielkości podane zgodnie z rokiem publikacji), typ listy MNiSW (A - pozycje z listy JCR, B - pozycje spoza JCR), a na końcu wyszczególnienie i oszacowanie mojego wkładu własnego (podane w %).

4.1 Cykl publikacji

- A1 **Sławomir Milewski**, Roman Putanowicz, 2019, "Higher order meshless schemes applied to the finite element method in elliptic problems", *Computers and Mathematics with Applications*, vol.77(4):779-802, IF = 1.860, MNiSW = 40 (A).

Mój wkład w powstanie tej pracy polegał na opracowaniu podejścia aproksymacji podwyższonego rzędu bazującej na wyrazach korekcyjnych wzorów różnicowych dla metody elementów skończonych, opracowaniu sposobu oszacowania błędu a-posteriori dla rozwiązania MES na podstawie rozwiązania odniesienia wysokiej klasy, wyprowadzeniu wszystkich wzorów i odpowiednich algorytmów obliczeniowych oraz ich zaprogramowaniu i połączeniu z generatorem siatek w środowisku Matlab, opracowaniu i przeprowadzeniu serii testów numerycznych, ilustrujących dokładność, zbieżność i złożoność czasową opisywanej metody kombinowanej MES/MRS, a także na napisaniu całości tekstu artykułu. Mój udział procentowy szacuję na 60%.

- A2 Witold Cecot, **Sławomir Milewski**, Janusz Orkisz, 2018, "Determination of Overhead Power Line Cables Configuration by FEM and Meshless FDM", *International Journal of Computational Methods*, vol.15(2):1-20, IF = 1.123, MNiSW = 25 (A).

Mój wkład w powstanie tej pracy polegał na opracowaniu modelu numerycznego rozciągliwego kabla bazującego na bezsiatkowej metodzie różnic skończonych, wyprowadzeniu wszystkich wzorów dla algorytmu Newtona-Raphsona, sformułowania słabego oraz metody różnic skończonych, przygotowaniu i uzyskaniu rezultatów dla części przykładów numerycznych zamieszczonych w pracy oraz konsultacji wyników pozostałych, a także na znacznym udziale w pisaniu tekstu artykułu (zwłaszcza rozdziałów 1, 3, 4, 6) oraz jego korekcie merytorycznej i językowej. Mój udział procentowy szacuję na 45%.

- A3 **Sławomir Milewski**, 2018, "Determination of the truss static state by means of the combined FE/GA approach, on the basis of strain and displacement measurements", *Inverse Problems in Science and Engineering*, artykuł w druku, doi:10.1080/17415977.2018.1509966, IF = 1.125, MNiSW = 20 (A).

Mój wkład (jedyne autorstwo) w powstanie tej pracy polegał na opracowaniu kombinowanej metody elementów skończonych w połączeniu z algorytmami genetycznymi, opracowaniu algorytmu rozwiązywania zadań odwrotnych za pomocą tej metody dla kraty płaskiej, opracowaniu metodologii pomiarów dostarczających dane do zadania (przemieszczenia węzłów i odkształcenia prętów), opracowaniu sposobów wykrywania uszkodzonych czujników, prętów o osłabionej sztywności oraz identyfikacji optymalnej liczby czujników przypadającej na konstrukcję. Dodatkowo wyprowadziłem wszystkie niezbędne wzory oraz opracowałem i wykonałem wszystkie obliczenia w autorskim programie napisanym w środowisku Matlab. Cały tekst artykułu jest mojego autorstwa. Mój udział procentowy wynosi 100%.

- A4 **Sławomir Milewski**, 2018, "Combination of the meshless finite difference approach with the Monte Carlo random walk technique for solution of elliptic problems", *Computers and Mathematics with Applications*, vol.76(4):854-876, IF = 1.860, MNiSW = 40 (A).

Mój wkład (jedyne autorstwo) w powstanie tej pracy polegał na opracowaniu kombinowanej bezsiatkowej metody różnic skończonych w połączeniu z podejściem Monte Carlo z losową ścieżką, opracowaniu ogólnego algorytmu rozwiązywania zadań eliptycznych za pomocą tej metody, z uwzględnieniem nieregularnej siatki węzłów, niejednorodności równania, dowolnego typu warunków brzegowych oraz anizotropii materiałowej. Dodatkowo wyprowadziłem wszystkie niezbędne

wzory oraz opracowałem i wykonałem wszystkie obliczenia w autorskim programie napisanym w środowisku Matlab, którego kod został dołączony do artykułu. Cały tekst artykułu jest mojego autorstwa. Mój udział procentowy wynosi 100%.

- A5 **Sławomir Milewski**, 2017, "Development of simple effective cloud of nodes and triangular mesh generators for meshless and element-based analyses - implementation in Matlab", *Computer Assisted Methods in Engineering and Science*, vol.24(3):157-180, IF = 0, MNiSW = 14 (B).

Mój wkład (jedyne autorstwa) w powstanie tej pracy polegał na opracowaniu sposobu generacji siatek, który może być wykorzystany zarówno w metodach bezsiatkowych jak i opartych na strukturze elementów, wyprowadzeniu wszystkich niezbędnych wzorów oraz opracowaniu i wykonaniu wszystkich obliczeń w autorskim programie napisanym w środowisku Matlab, którego kod został dołączony do artykułu. Cały tekst artykułu jest mojego autorstwa. Mój udział procentowy wynosi 100%.

- A6 Jan Jaśkowiec, **Sławomir Milewski**, 2016, "Coupling finite element method with meshless finite difference method in thermomechanical problems", *Computers and Mathematics with Applications*, vol.72(9):2259-2279, IF = 1.697, MNiSW = 40 (A).

Mój wkład w powstanie tej pracy polegał na opracowaniu programu obliczeniowego w środowisku Matlab do implementacji wzorów przygotowanych przez współautora, przygotowaniu i uzyskaniu rezultatów dla przykładów numerycznych zamieszczonych w pracy, przygotowaniu rozdziału nr 5 oraz korekcie merytorycznej i językowej artykułu. Mój udział procentowy szacuję na 40%.

- A7 Jan Jaśkowiec, **Sławomir Milewski**, 2015, "The effective interface approach for coupling of the FE and meshless FD methods and applying essential boundary conditions", *Computers and Mathematics with Applications*, vol.70(5):962-979, IF = 1.697, MNiSW = 40 (A).

Mój wkład w powstanie tej pracy polegał na opracowaniu programu obliczeniowego w środowisku Matlab do implementacji wzorów przygotowanych przez współautora, przygotowaniu i uzyskaniu rezultatów dla przykładów numerycznych zamieszczonych w pracy, przygotowaniu rozdziałów nr 2 i nr 7 oraz korekcie merytorycznej i językowej artykułu. Mój udział procentowy szacuję na 40%.

- A8 **Sławomir Milewski**, Janusz Orkisz, 2014, "In search of optimal acceleration approach to iterative solution methods of simultaneous algebraic equations", *Computers and Mathematics with Applications*, vol.68(3):101-117, IF = 1.697, MNiSW = 40 (A).

Mój wkład w powstanie tej pracy polegał na współopracowaniu podejścia przyspieszenia zbieżności metod iteracyjnych metodą postępu geometrycznego, dla układów równań liniowych, współopracowaniu podejścia przyspieszenia zbieżności metod iteracyjnych metodą relaksacji ze zmiennym jednym parametrem lub dwoma parametrami, dla układów równań liniowych i nieliniowych, opracowaniu połączenia metody różnicowej z podejściem relaksacji dla zadań nieliniowych mechaniki (duże ugięcia belki zginanej oraz deformacja błony), wyprowadzeniu wszystkich wzorów i odpowiednich algorytmów obliczeniowych oraz ich zaprogramowaniu w środowisku Matlab, opracowaniu i przeprowadzeniu serii testów numerycznych, ilustrujących dokładność, zbieżność i złożoność czasową wszystkich opisywanych metod, a także na napisaniu całości tekstu artykułu. Mój udział procentowy szacuję na 33%.

- A9 **Sławomir Milewski**, 2012, "Meshless Finite Difference Method with Higher Order Approximation - Applications in Mechanics", *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol.19(1):1-49, IF = 2.931, MNiSW = 40 (A).

Mój wkład (jedyne autorstwa) w powstanie tej pracy polegał na opracowaniu algorytmów obliczeniowych do wszystkich, analizowanych w pracy, zadań mechaniki (analiza termiczna, liniowo-sprężysta oraz geometrycznie i fizycznie nieliniowa), opartych na bezsiatkowej metodzie różnic skończonych, połączonej m.in. z metodą Monte Carlo, analizą zbiorów rozmytych, metodą Newtona-Raphsona czy też metodą wielosiatkową, z uwzględnieniem aproksymacji podwyższonego rzędu opartej na wyrazach korekcyjnych, a także na przygotowaniu wszystkich przykładów

publikacja	rok	IF	lista MNiSW	punkty MNiSW	współautorzy	mój wkład
A1	2019	1.860	A	40	1	60%
A2	2018	1.123	A	25	2	45%
A3	2018	1.125	A	20	0	100%
A4	2018	1.860	A	40	0	100%
A5	2017	0	B	14	0	100%
A6	2016	1.697	A	40	1	40%
A7	2015	1.697	A	40	1	40%
A8	2014	1.697	A	40	1	33%
A9	2012	2.931	A	40	0	100%
A10	2011	0.254	A	15	1	80%
A11	2011	0	-	0	1	80%

Tabela 1: Szczegółowe podsumowanie cyklu publikacji

i przeprowadzeniu obliczeń, z wykorzystaniem autorskich programów napisanych w języku C++ oraz środowisku Matlab. Cały tekst artykułu jest mojego autorstwa. Mój udział procentowy wynosi 100%.

- A10 **Sławomir Milewski**, Janusz Orkisz, 2011, "Improvements in the global A-posteriori error estimation of the fem and MFDM solutions", *Computing and Informatics*, vol.30(3):639-653, IF = 0.254, MNiSW = 15 (A).

Mój wkład w powstanie tej pracy polegał na współopracowaniu sformułowania bezsiatkowej metody różnic skończonych podwyższonego rzędu dla zadań 1D i 2D, opracowaniu szczegółów działania wybranych estymatorów typu hierarchicznego oraz wygładzeniowego dla bezsiatkowej MRS. opracowaniu technik wykorzystania oceny błędu typu różnicowego dla metody elementów skończonych (kombinowane podejście MRS-MES), wyprowadzeniu odpowiednich algorytmów obliczeniowych oraz ich zaprogramowaniu w środowisku Matlab, opracowaniu i przeprowadzeniu serii testów numerycznych, ilustrujących dokładność i zbieżność metody oraz napisaniu całości tekstu artykułu. Mój udział procentowy szacuję na 80%.

- A11 **Sławomir Milewski**, Janusz Orkisz, 2011, "Global-local Petrov-Galerkin formulations in the meshless finite difference method", *Lecture Notes in Computational Science and Engineering: Meshfree Methods for Partial Differential Equations V*, vol.79:1-26 (rozdział w monografii), IF = 0, MNiSW = 0.

Mój wkład w powstanie tej pracy polegał na współopracowaniu sformułowania typu Petrov-Galerkin w połączeniu z bezsiatkową metodą różnic skończonych w problemach 1D i 2D, w dwóch wersjach: MLPG5 oraz MLGP7, opracowaniu wersji aproksymacji podwyższonego rzędu bazującej na wyrazach korekcyjnych operatora różnicowego dla MLGP5 oraz MLPG7, wykorzystywanej do oszacowania błędu a-posteriori oraz podejścia adaptacyjnego, wyprowadzeniu odpowiednich algorytmów obliczeniowych oraz ich zaprogramowaniu w języku C++, opracowaniu i przeprowadzeniu serii testów numerycznych, ilustrujących dokładność i zbieżność metody oraz napisaniu całości tekstu artykułu. Mój udział procentowy szacuję na 80%.

Ponadto, liczbowe podsumowania cyklu publikacji zostały przedstawione w Tab. 1 (w sposób szczegółowy) oraz w Tab. 2 (w skrócie).

4.2 Związek z dyscypliną budownictwo

Wszystkie wymienione w cyklu prace mają ścisły związek z dyscypliną **budownictwo**. Dotyczą one numerycznego modelowania procesów termicznych i mechanicznych, zachodzących w konstrukcjach

typ publikacji	liczba	punkty MNiSW	Impact Factor
artykuły listy JCR (MNiSW, lista A)	9	300	14.244
artykuły spoza listy JCR (MNiSW, lista B)	1	14	0
rozdziały w monografii	1	0	0
suma	11	314	14.244

Tabela 2: Ogólne podsumowanie cyklu publikacji

inżynierskich. Rozwiązanie analityczne takich procesów jest możliwe do uzyskania tylko w prostych przypadkach. Dlatego też niezbędne są odpowiednie narzędzia numeryczne, pozwalające otrzymywać rozwiązania przybliżone. Cykl prac obejmuje kilka propozycji kombinacji istniejących metod, które pozwalają na szybsze, bardziej dokładne i efektywne rozwiązywanie zagadnień inżynierii lądowej i mechaniki. W kolejnych pracach analizowano takie zadania, jak deformacja konstrukcji prętowych, ustalony i nieustalony przepływ ciepła przez tarczę, płaski stan odkształcenia i płaski stan naprężenia oraz ogólny problem trójwymiarowy. Rozważano również sprężenia stanu termicznego i mechanicznego, w których to dodatkowe odkształcenie jest generowane przez przyrost temperatury w konstrukcji. Dodatkowo, wybrane prace dotyczą rzeczywistych konstrukcji inżynierskich, np. nieliniowa analiza napowietrznych kabli elektrycznych oraz odwrotna analiza konstrukcji kratowych, w ramach której obciążenie kratownicy jest odtwarzane na bazie pomiarów ich elementów.

4.3 Wprowadzenie

Autoreferat jest zorganizowany w następujący sposób. Matematyczny opis rozpatrywanych problemów został przedstawiony w Rozdziale 4.4. Jest on kontynuowany (Rozdział 4.5) krótką prezentacją wszystkich metod numerycznych, stosowanych w moich badaniach. Zawiera ona ich rys historyczny i stan wiedzy, a także ich wady i zalety oraz najczęstsze pola zastosowań. Metody te można podzielić na **deterministyczne (metoda elementów skończonych (MES), metoda różnic skończonych (MRS), bezsiatkowa metoda różnic skończonych (BMRS)) i stochastyczne (metoda Monte Carlo (MC), a także algorytmy genetyczne (AG))**. Pierwszy typ metod bazuje na jednoznacznie określonych parametrach wejściowych i na podstawie zadanej dyskretyzacji obszaru oraz aproksymacji funkcji dostarcza jednoznaczne rozwiązanie zadania. Drugi typ bierze pod uwagę losowość parametrów i niepewność modelu, wykorzystuje zatem procesy stochastyczne i dostarcza rodziny rozwiązań, z których należy wybrać najlepsze rozwiązanie, przyjmując odpowiednie kryteria. W najważniejszym rozdziale (Roz. 4.6) omówiono szczegółowo **nowatorskie kombinacje powyższych metod**. Za każdym razem wyróżnione zostały oryginalne elementy, zaproponowane i opracowane przeze mnie (wyłącznie lub we współpracy z innymi współautorami moich prac badawczych). Ostatecznie, w Rozdziale 4.7, zaprezentowane są wyniki wybranych eksperymentów numerycznych, wykonane na problemach testowych i uzyskane w całości przeze mnie. Są one przedstawione zgodnie z ich interpretacjami termicznymi lub mechanicznymi, które odpowiadają podstawowej zawartości kolejnych prac, zawartych w wyżej wymienionym cyklu. Tekst uzupełniają trzy listy literatury: pozycje z listy A (podrozdział 4.1) obejmują pozycje cyklu publikacji stanowiącego osiągnięcie naukowe, pozycje z listy B (podrozdział 5.1) to moje pozostałe autorskie bądź współautorskie artykuły, natomiast pozycje z listy R (rozdział 7) to odnośniki do fundamentalnych prac z dziedziny mechaniki obliczeniowej, z których zaczerpnąłem bezpośrednią inspirację do moich badań naukowych.

4.4 Opis analizowanych problemów

Cykl publikacji dotyczy zagadnień termicznych (stacjonarnych i niestacjonarnych), mechanicznych (liniowych i nieliniowych) oraz sprzężonych problemów termomechanicznych, z uwzględnieniem efektów czasowych. Najbardziej ogólne sformułowanie takiego sprzężonego problemu można podać w następujący sposób: znaleźć skalarną funkcję temperatury (T) i wektorową funkcję przemieszczeń (u), które

spełniają odpowiednie równania różniczkowe natury termicznej

$$\begin{aligned} c\rho\dot{T} + \operatorname{div} \mathbf{q} &= f, \text{ w } \Omega \\ T &= \bar{T} \text{ na } \partial\Omega_T, \mathbf{qn} = \bar{q}, \text{ na } \partial\Omega_q, T = 0 \text{ dla } t = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

i mechanicznej

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \text{ w } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \text{ na } \partial\Omega_t, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \text{ na } \partial\Omega_u, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ dla } t = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

W powyższych wzorach, ρ oznacza gęstość masy, c - ciepło właściwe, $T = T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \subset C^2$ - nieznaną funkcję temperatury, \bar{T} - temperaturę przypisaną do brzegu, \mathbf{q} - nieznaną wektor strumienia ciepła, \bar{q} - strumień ciepła przypisany do brzegu w kierunku normalnym, f - intensywność generacji ciepła wewnątrz obszaru (tzw. źródło ciepła), $\boldsymbol{\sigma}$ - tensor naprężenia drugiego rzędu, wynikający z $\boldsymbol{\epsilon}$ - tensora odkształcenia drugiego rzędu, \mathbf{b} - wektor sił masowych, $\bar{\mathbf{t}}$ - wektor naprężenia, przypisany do brzegu (tzw. "trakcje"), $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \subset C^2$ - nieznaną wektor przemieszczenia i $\bar{\mathbf{u}}$ - wektor przemieszczenia, przypisany do brzegu. Wymiar n może być równy 1 (przypadek 1D, przykładowo konstrukcje prętowe), 2 (przypadek 2D, przykładowo problemy płaskie (PSO lub PSN) i osiowo-symetryczne), lub 3 (ogólny przypadek 3D). Ponadto, Ω oznacza dziedzinę (obszar) zadania, a $\partial\Omega_T$, $\partial\Omega_q$, $\partial\Omega_t$ and $\partial\Omega_u$ są częściami brzegu z odpowiednio zadanymi warunkami brzegowymi, podczas gdy \mathbf{n} jest wektorem normalnym do brzegu i skierowanym na zewnątrz obszaru. Równania (4.1) i (4.2) powinny być uzupełnione odpowiednimi związkami fizycznymi, przykładowo prawem Fouriera dla materiałów anizotropowych

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T \quad (4.3)$$

a także uogólnionym prawem Hooke'a

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}^u \quad (4.4)$$

W powyższych równaniach, $\boldsymbol{\lambda}$ jest tensorem drugiego rzędu współczynników przewodzenia ciepła (w specjalnym przypadkach $\boldsymbol{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$ dla materiałów izotropowych i $\boldsymbol{\lambda} = \operatorname{diag} \lambda_i$ dla materiałów ortotropowych, $i = 1, \dots, n$), a \mathbf{E} jest tensorem czwartego rzędu mechanicznych stałych materiałowych (przykładowo, moduł Younga E i współczynnik Poissona ν lub stałe Lamé'go, alternatywnie). Tensor całkowitego odkształcenia ($\boldsymbol{\epsilon}$) może być rozbitý na część mechaniczną ($\boldsymbol{\epsilon}^u$) oraz termiczną ($\boldsymbol{\epsilon}^T$)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^u + \boldsymbol{\epsilon}^T \quad (4.5)$$

przy założeniu małych odkształceń. Co więcej, część mechaniczna może zawierać wpływ efektów sprężystych i plastycznych ($\boldsymbol{\epsilon}^u = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$), jednakże tylko efekty sprężyste są rozważane w moich dotychczasowych badaniach ($\boldsymbol{\epsilon}^u = \boldsymbol{\epsilon}^e$). Odkształcenie sprężyste $\boldsymbol{\epsilon}^e$ jest powiązane z wektorem przemieszczeń (\mathbf{u}) poprzez równania geometryczne, podczas gdy $\boldsymbol{\epsilon}^T = \alpha T \mathbf{I}$, gdzie α jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej, a \mathbf{I} jest tensorem jednostkowym drugiego rzędu.

Lokalne (mocne) sformułowanie sprężonego problemu, podane powyżej, może być zastosowane bezpośrednio do analizy bezsiatkowej (tj. analizy z aproksymacją budowaną jedynie na bazie punktów (węzłów), bez wymuszania struktury siatki). Jednak w przypadku siatki elementów skończonych, należy opracować odpowiednie formuły globalne (np. sformułowanie słabe (wariacyjne)) dla obu typów modeli). Jest to dosyć złożone zagadnienie, dlatego zostało pominięte w niniejszym opracowaniu. Jednakże, więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w moich autorskich i współautorskich pracach [A1, A2, A6 ÷ A8], a także w [R1, R3 ÷ R5].

4.5 Opis stosowanych metod

Wśród metod obliczeniowych, stosowanych w moich badaniach, szczególnie warto wymienić poniższe, przedstawione w kolejnych podrozdziałach.

4.5.1 Metoda elementów skończonych (MES)

MES [R1] jest najczęściej stosowaną metodą typu deterministycznego. Jej charakterystyczną cechą jest podział obszaru zadania (ciągłego) na zbiór dyskretnych figur geometrycznych (elementów skończonych), z węzłami (ogólnie) umieszczonymi w ich wierzchołkach, krawędziach, ścianach i/lub wnętrzach. Poszczególne elementy są ze sobą połączone przez relacje przylegania, tworząc strukturę regularną lub nieregularną. Aproksymacja nieznannej funkcji budowana jest w obrębie elementów skończonych, przyjmując wartości węzłowe jako stopnie swobody. Dlatego potrzebne są odpowiednie sformułowania wariacyjne, pochodzące od mocnych (4.1) i (4.2). Współczesna mechanika obliczeniowa jest zdominowana przez MES. Jest to w pełni dojrzałe i uniwersalne narzędzie, stosowane w analizie numerycznej szerokiej klasy problemów początkowo-brzegowych. Jednakże można zauważyć kilka poważnych wad standardowego algorytmu MES, w tym czasochłonne generowanie siatki, niezadowalającą dokładność pochodnych rozwiązania (z wyjątkiem mieszanej wersji MES), jak również czasochłonną generację elementów skończonych o wysokim rzędzie interpolacji [R3].

4.5.2 Metoda różnic skończonych (MRS)

MRS [R5] jest najstarszą deterministyczną metodą analizy numerycznej problemów brzegowych. Bazuje ona na regularnych siatkach węzłów i prostych operatorach różnicowych, zastępujących pochodne, które pojawiają się w równaniach (4.1) i (4.2). Chociaż jest bardzo prosta i stosunkowo szybka, ogranicza się do problemów z nieskomplikowaną geometrią, ze względu na brak możliwości lokalnych zagęszczeń siatki. Można ją jednak stosować do obu typów sformułowań (mocnych i słabych).

4.5.3 Bezsiatkowa metoda różnic skończonych (BMRS)

BMRS [A9, R5, B3] należy do szerokiej grupy (ponad stu) (deterministycznych) metod bezsiatkowych (MB, [R2, R5]), które są skutecznie rozwijane przez ostatnie 40 lat. Zgodnie z definicją podaną przez S.Idelsohna i T.Belytschko ([R11]), te metody są bezsiatkowe, w których aproksymacja nieznannej funkcji budowana jest tylko w odniesieniu do węzłów. Dlatego używają one nieregularnych i niestrukturalnych chmur węzłów, w których to węzły mogą być rozmieszczone całkowicie dowolnie, bez jakiegokolwiek struktury narzuconej a-priori, jak podział obszaru na elementy lub regularność siatki lub też ograniczenia wynikające z rzutowania pomiędzy obszarem strukturalnym i rzeczywistym. MB można podzielić na kilka typów, na przykład w zależności od sposobu, w jaki jest skonstruowana lokalna aproksymacja funkcji. Chociaż w pełni dojrzałe, metody bezsiatkowe wciąż są rozwijane jako współczesne narzędzie do analizy dla szerokiej klasy problemów brzegowych. W szczególności są one efektywne w problemach z ruchomym brzegiem, propagacją pęknięć, ubytkiem materiału (np. z powodu korozji), dużymi odkształceniami, problemami nieliniowymi, skupionymi obciążeniami, jak również w bardziej konwencjonalnych problemach, które jednak wymagają częstej poprawy położenia i liczebności węzłów. BMRS jest jedną z najstarszych, a zatem prawdopodobnie najbardziej rozwiniętych metod bezsiatkowych (przynajmniej od 1977 roku). W BMRS lokalna aproksymacja jest, w większości przypadków, generowana przez metodę ruchomych ważonych najmniejszych kwadratów (ang. MWLS, [R5, R6]). Można tu wymienić liczne zalety BMRS, a mianowicie elastyczność wyboru sformułowania problemu (dowolne zawierające pochodne funkcji); efektywne zastosowanie dowolnie nieregularnych chmur węzłów, generowanych na podstawie, przykładowo, funkcji gęstości węzłów; brak struktury elementu do selekcji węzłów, aproksymacji funkcji, całkowania numerycznego, dyskretyzacji warunków brzegowych, końcowej obróbki wyników; istnienie wersji lokalnej metody (bez potrzeby całkowania numerycznego); gładkie rozwiązanie i jego pochodne (w wyniku jego obróbki za pomocą MWLS); bezwarunkowa nad-zbieżność pochodnych rozwiązana, a także łatwa automatyzacja całego procesu adaptacji typu h [R3, R4].

4.5.4 Metoda Monte Carlo (MC) z techniką losowej ścieżki

Idea tego podejścia probabilistycznego (nazwanego metodą Monte Carlo i opracowanego przez S. Ulama i J. von Neumanna [R7]) bazuje na wykonaniu szeregu symulacji (prób), reprezentujących analizowany problem, z losowo wybranymi wartościami wejściowymi. W konsekwencji osiągnięta zostaje określona liczba prawidłowo zdefiniowanych sukcesów. Liczba prób zakończonych powodzeniem odniesiona do liczby wszystkich prób, przeskalowana przez wielkość wymiarową (długość, powierzchnia, objętość, wartość funkcji) pozwala na oszacowanie nieznanego rozwiązania, pod warunkiem, że liczba prób jest wystarczająco duża. Ta prosta koncepcja została wykorzystana w różnych problemach algebraicznych i różniczkowych, w których określenie rozwiązania może być kłopotliwe (np. w dużych przestrzeniach) lub nawet praktycznie niemożliwe przy użyciu analitycznych metod i deterministycznych narzędzi numerycznych. W moich badaniach uwagę skupiłem na numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych w wybranych punktach wewnętrznych obszaru problemu. Seria prób przeprowadzana jest za pomocą techniki stochastycznej, związanej z generowaniem tzw. losowych ścieżek (ang. random walks), a mianowicie losowego wyboru ścieżki prowadzącej od rozważanego punktu wewnętrznego (z nieznanym rozwiązaniem) do punktów położonych na brzegu obszaru, gdzie rozwiązanie jest dane (z warunków brzegowych podstawowego typu). Całkowita suma wszystkich liczbowych wskazań brzegowych (*trafienia brzegowe*), skalowana przez zadane wartości brzegowe i odniesiona do liczby wszystkich losowych ścieżek, szacuje rozwiązanie równania Laplace'a w tym konkretnym punkcie. W rzeczywistości jest ona zbieżna do rozwiązania MRS, pod warunkiem, że liczba losowych ścieżek jest wystarczająco duża. Co więcej, każda ścieżka składa się z serii losowych ruchów od węzła do węzła, które można uznać za elementy łańcucha Markowa. W najprostszym przypadku wszystkie kierunki ruchu i rozmiar kroku (odległość pomiędzy sąsiednimi węzłami) są wstępnie zdefiniowane (np. w przypadku użycia regularnej siatki punktów), co prowadzi do tzw. ustalonej losowej ścieżki.

4.5.5 Algorytmy genetyczne (AG)

AG [R8] są probabilistycznymi metodami przeszukiwania przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań, w celu znalezienia optymalnego rozwiązania odpowiedniego problemu optymalizacji. Chociaż charakteryzują się powolną zbieżnością, pozwalają na skuteczne rozwiązywanie problemów niewypukłych. Funkcjonowanie AG nieprzypadkowo przypomina zjawiska ewolucji biologicznej, ponieważ ich twórca, J.H. Holland, czerpał inspirację z nauk biologicznych. W AG problem definiowany jest jako środowisko, w którym istnieje pewna populacja jednostek. Każdemu z osobników przypisuje się pewien zestaw informacji stanowiących jego genotyp, który jest podstawą do stworzenia fenotypu. Fenotyp jest zbiorem cech pozwalających na oszacowanie wartości funkcji celu modelującej środowisko. Innymi słowy, genotyp opisuje proponowane rozwiązanie problemu, a funkcja celu (fenotyp) ocenia, jak dobre jest to rozwiązanie. Sam genotyp składa się z chromosomów, w których kodowany jest fenotyp i ewentualnie niektóre informacje pomocnicze dla algorytmu genetycznego. W najprostszym przypadku chromosom składa się z genów, które są cyframi binarnymi (tj. bitami 0 lub 1). Ponadto, w szerszej klasie algorytmów ewolucyjnych (AE), chromosomy mogą również reprezentować liczby dziesiętne. Początkowa populacja jest generowana losowo lub tworzona na podstawie wstępnych informacji dotyczących środowiska. Populacja ta podlega ciągłym modyfikacjom za pomocą podstawowych operatorów genetycznych, przykładowo selekcji, krzyżowania, mutacji i innych.

Inne podejścia numeryczne (również procedury przyspieszania procedur numerycznych), które zostały połączone z tymi wymienionymi powyżej, obejmują metodę Newtona-Raphsona z nad-relaksacją, bezsiatkowe sformułowanie lokalne Petrova-Galerkina (ang. MLPG [R9]) oraz podejście zbiorów rozmytych [R10]. Ich krótki opis podano w następnym podrozdziale.

4.6 Opis proponowanych kombinacji metod

W większości przypadków, MES i inne podejścia do rozwiązywania zagadnień numerycznych są przedstawiane jako antagoniści, chociaż z rzetelnym porównaniem ich zalet i wad [R2, R9]. Jednakże od-

powiednie sprzężenia metod do obliczeniowej analizy problemów brzegowych mechaniki i problemów inżynierii lądowej zostały zainicjowane już na początku lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku [R11, R13]. Od tego czasu, mimo iż temat ten został znacznie rozwinięty przez wielu badaczy, jest on nadal w fazie badań. Główną ideą sprzężenia metod jest wyeliminowanie lub zredukowanie wad jednej metody (np. czasochłonne generowanie siatki, niski stopień zbieżności pochodnych rozwiązania, złożoność obliczeniowa, czas obliczeń) lub wykorzystanie zalet innej metody (brak struktury węzłów, nad-zbieżność pochodnych rozwiązania, wygładzanie za pomocą najmniejszych kwadratów, niezależna siatka całkowania, oszacowanie gradientu funkcji celu, istnienie stochastycznych rodzin rozwiązań itp.) w bardziej efektywny sposób. Przez lata wszystkie te badania, w tym prowadzone przeze mnie, zaowocowały różnymi możliwymi podejściami kombinowanymi, w których sprzężenie można zastosować na różnych poziomach analizy numerycznej:

1. Różne metody stosowane w rozłącznych podobszarach z odpowiednimi strefami przejściowymi (*kombinacja równoległa*), na przykład sprzężenie MES z metodami bezsiatkowymi, stosowane na poziomie dyskretyzacji, z dodatkową warstwą interfejsu (np. kombinowana MES-BMRS, **opracowana przez J.Jaśkowca i przeze mnie w [A6,A7] i dalej przeze mnie wyłącznie w [A5]**).
2. Dyskretyzacja obszaru zadania za pomocą jednej metody i generowanie schematów aproksymacyjnych za pomocą technik innych metod (*kombinacja łączona*), na przykład aproksymacja MES, po której następuje numeryczne różniczkowanie za pomocą metody MWLS (np. ulepszona MES-BMRS, **opracowana całkowicie przeze mnie w [A1]**) lub kombinowany algorytm MES-AG do rozwiązywania problemów odwrotnych (np. analiza odwrotna kratownicy, **opracowana całkowicie przeze mnie w [A3]**).
3. Ogólne przetwarzanie końcowe wyników jednej metody, za pomocą schematów aproksymacyjnych typowych dla innych metod (*kombinacja szeregową*), na przykład zastosowanie MWLS (typowego dla BMRS) w analizie a-posteriori błędów rozwiązania MES (np. na bazie rozwiązania MRS wyższego rzędu, **opracowanego przez J.Orkisz i przeze mnie w [A10], i zastosowanego do rzeczywistego problemu inżynierskiego w [A2]**).
4. Kombinacja wybranych aspektów i zasad dwóch lub więcej różnych metod numerycznych w celu opracowania zupełnie nowego oryginalnego podejścia (*kombinacja rozszerzona*), np. bezsiatkowa metoda Monte Carlo (**opracowana całkowicie przeze mnie w [A4]**) lub połączenie MLPG/BMRS (**opracowane przez J.Orkisz i przeze mnie w [A11]**).
5. Inne, mniej typowe możliwości kombinacji, w tym te **opracowane przez J.Orkisz i przeze mnie, przedstawione w [A8,A9]**.

Poniższe podrozdziały omawiają szczegółowo wszystkie kombinacje metod, które zostały opracowane tylko przeze mnie, lub też wspólnie ze współautorami moich prac (**J.Orkisz, W.Cecot, J.Jaśkowiec, R.Putanowicz**).

4.6.1 Łączona MES-BMRS na poziomie dyskretyzacji (*kombinacja równoległa*)

Obszar problemu jest podzielony na zbiór rozłącznych podobszarów, z różnymi metodami w każdym z nich ([A5, A6, A7]). W celach ilustracyjnych założymy, że cały obszar problemu Ω jest podzielony na dwa podobszary: Ω_1 i Ω_2 ($\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ i $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$). Podział ten jest wykonywany z określonych powodów, na przykład Ω_1 jest znacznie bardziej wrażliwe na obciążenie termiczne (np. z powodu silniejszego przewodnictwa materiału) i dlatego wymaga bardziej dokładnego rozwiązania niż drugi, mniej ważny Ω_2 . Można zastosować całkowicie różne metody w obu podobszarach, z niezależnymi gęstościami dyskretyzacji, stopniami aproksymacji, siatkami niezgodnymi na interfejsie (części wspólnej podobszarów) i wymuszać warunki ciągłości rozwiązania na tym interfejsie. Idea sprzężenia opiera się na wprowadzeniu bardzo cienkiej (choć skończonej) warstwy materiału $\partial\Omega_{1,2}$, oddzielającej te dwa podobszary. Jej szerokość jest dobierana zgodnie z odpowiednimi założeniami heurystycznymi i zależy

od parametrów dyskretyzacji i aproksymacji. Wzdłuż tej warstwy interfejsu jest obliczana dodatkowa całka krzywoliniowa (w 2D) lub powierzchniowa (w 3D). Wynika ona bezpośrednio ze słabego sformułowania (np. zasada wariacyjna) pierwotnego problemu. W związku z tym zarówno sformułowanie problemu, jak i jego rozwiązanie pozostają ciągłe, chociaż aproksymacja rozwiązania wykazuje nieciągłość, ograniczoną przez szerokość warstwy interfejsu ([A6, A7]). Wprowadzono dwa operatory

$$\langle T \rangle_{1,2} = 0.5 \cdot (T_1 + T_2), \quad [[T]]_{1,2} = T_1 - T_2 \quad (4.6)$$

pozwalające na obliczenie średniej wartości rozwiązania na interfejsie. W konsekwencji można sformułować jeden monolityczny schemat obliczeniowy, opracowany przez J. Jaśkowca, w którym stosowane są sprzężone dwupolowe (dla problemów termomechanicznych) elementy skończone i nieregularna chmura węzłów. Problem algebraiczny rozwiązuje się jednocześnie dla obu podstawowych niewiadomych, mianowicie temperatury węzłowej i wektora przemieszczenia. Odpowiednie schematy aproksymacji, **opracowane przeze mnie w [A6, A7]** i powiązane z MES i/lub BMRS, są wprowadzane do równań wariacyjnych. Dodatkowe całki po wspólnej warstwie interfejsu można podzielić na dwie grupy, mianowicie te mnożone przez odwrotność szerokości (odpowiedzialnej za ciągłość rozwiązania) oraz wszystkie pozostałe (z mnożnikami równymi 1 i samej szerokości), które są odpowiedzialne za zapewnienie ciągłości pochodnych rozwiązań, a zatem mogą być uważane za składniki regularyzacyjne.

4.6.2 Ulepszona MES-BMRS na poziomie aproksymacji (kombinacja łączona)

Generowanie schematów aproksymacyjnych wysokiego rzędu w MES wymaga modyfikacji siatki lub użycia węzłów znajdujących się na krawędziach elementów (np. wiszących węzłów), wzbogacenia zestawu nieznanymi stopni swobody (z ich opcjonalną statyczną kondensacją) lub odpowiedniej projekcji z obszaru odniesienia do rzeczywistego [R1, R3, R4]. Może to być kłopotliwe, gdy wymagane są częste modyfikacje dyskretnego modelu (wstawianie, usuwanie i przesuwanie dowolnych węzłów ma silny wpływ na topologię siatki). Ponadto aproksymacja może być rozpięta na różnych typach elementów skończonych, co komplikuje podział i unifikację tych elementów (np. w problemach z ruchomym brzegiem). Ponadto, we wszystkich wariantach, parametry całkowania numerycznego muszą być wybrane w odpowiedni sposób, aby uniknąć osobliwości w macierzach sztywności elementów, jak również zjawiska blokady objętościowej. Ulepszone podejście MES-BMRS pozwala na wyeliminowanie wszystkich tych wad ([A1]). Struktura MES, z najprostszymi możliwymi wielomianami, w postaci interpolujących funkcji kształtu rzędu p^L , jest stosowana dla otrzymania podstawowego rozwiązania. Następnie rozważane są dodatkowe wyrazy wyższego rzędu (do p^H włącznie). Te wyrazy pochodzą z rozwinięcia wartości funkcji w szereg Taylora, w punktach całkowania. Mogą składać się z pochodnych wyższego rzędu, jak również mogą odpowiadać za redukcję nieciągłości i/lub osobliwości rozwiązania. Pochodne wyższych rzędów są obliczane za pomocą składania formuł różnicowych (generowanych w sposób bezsiatkowy w węzłach) i podstawowego rozwiązania MES, odpowiadającego standardowym funkcjom kształtu. Wyrazy korekcyjne modyfikują tylko prawą stronę równań MES, prowadząc do prostej iteracyjnej procedury. Warto podkreślić, że ostateczne rozwiązanie nie zależy od jakości pierwotnej interpolacji. To rozwiązanie jest obciążone tylko błędem obciążenia wynikającym z rozwinięcia w Taylora.

W przeciwieństwie do różnych technik wyższego rzędu stosowanych w MES, MRS i metodach bezsiatkowych, zaproponowane podejście, **opracowane w całości przeze mnie w [A1]**, które pozwala na uzyskanie rozwiązania wielomianowego w ramach interpolacji wysokiego rzędu p^H , ma wiele zalet, a mianowicie:

- nie wymaga wprowadzania dodatkowych węzłów, ani uogólnionych stopni swobody o nieznanymi wartościach do standardowych schematów MES, ani żadnych modyfikacji istniejącej struktury dyskretyzacji i/lub aproksymacji,
- nie wymaga wprowadzania wiszących węzłów (np. do celów adaptacyjnych) ani statycznej kondensacji dodatkowych wewnętrznych stopni swobody (ponieważ takich nie ma),

- może być zastosowana najprostsza interpolacja MES niskiego rzędu $p^L < p^H$ (np. trójkąty ze standardowymi funkcjami liniowymi), bez względu na końcowy rząd interpolacji p^H ,
- nie jest wymagane odwzorowanie między obszarem rzeczywistym a obszarem odniesienia, ani użycie żadnych specjalnych (ortogonalnych) funkcji kształtu,
- zastosowanie najprostszych funkcji kształtu pozwala na uniknięcie źle uwarunkowanych i osobliwych schematów aproksymacji,
- numeryczne parametry całkowania odpowiadają podstawowemu rzędowi interpolacji (p^L), co prowadzi do zmniejszenia liczby wymaganych punktów całkowania (np. tylko 3 punkty na każdy element trójkątny z liniowymi funkcjami kształtu),
- globalna macierz sztywności \mathbf{K} jest generowana i agregowana, jak również odwracana (\mathbf{K}^{-1}) lub rozkładana na czynniki trójkątne ($\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$) tylko raz dla całego procesu rozwiązania,
- pochodne niskiego rzędu ($1, \dots, p^L$) są obliczane na etapie przetwarzania wyników, z wykorzystaniem interpolacji MES (dla gładkich rozwiązań) lub aproksymacji MWLS, a także bieżącego rozwiązania \mathbf{T} , na przykład \mathbf{T}^L , odpowiadającego p^L ,
- pochodne wyższego rzędu ($p^L + 1, \dots, p^H$) są obliczane za pomocą składania formuł różnicowych, odpowiadających niskiemu rzędowi aproksymacji,
- tylko prawa strona (wektor obciążenia \mathbf{B}) globalnego układu równań algebraicznych ($\mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{B}$) jest modyfikowana za pomocą odpowiedniej korekty, składającej się z pochodnych wyższego rzędu,
- cała procedura rozwiązania bazuje na iteracyjnym rozwiązaniu układu równań algebraicznych, z tą samą macierzą sztywności, choć z prawą stroną modyfikowaną na każdym kroku iteracji; ten system może być rozwiązany, na przykład, za pomocą rozkładu \mathbf{L} i \mathbf{L}^T określonego a-priori, a mianowicie rekursywnych formuł "krok wstecz" i "krok wprzód",
- duża jakość rozwiązania wyższego rzędu, z bardzo dużym tempem zbieżności,
- ze względu na cechę nad-zbieżności, pochodne rozwiązania charakteryzuje wysoka dokładność i tempo zbieżności, w pełni konkurencyjne wobec samego rozwiązania,
- rozwiązanie wyższego rzędu może być stosowane jako wysokiej jakości rozwiązanie referencyjne do celów szacowania błędów a-posteriori, jak również w technikach adaptacyjnych.

4.6.3 Obróbka rezultatów MES za pomocą BMRS (kombinacja szeregową)

Główną ideą podejścia jest opracowanie globalnych estymatorów błędów a-posteriori wysokiego rzędu. Rozwiązanie wyższego rzędu jest stosowane tutaj jako rozwiązanie odniesienia wysokiej jakości, dla kilku typów powszechnie stosowanych estymatorów błędów rozwiązania, mianowicie estymatorów hierarchicznych, wygładzających i residualnych niejawnych ([R3, R4]). Rozwiązanie odniesienia wyższego rzędu zapewnia oszacowanie błędów rzędu $2p$ (w przeciwieństwie do klasycznego $(p + 1)$, używanego w standardowej MES), gdzie p oznacza podstawowy rząd aproksymacji. W przeciwieństwie do znanych estymatorów standardowych, nie jest potrzebny duży nakład obliczeniowy. Koncepcja hierarchicznych estymatorów opracowanych przez J. Orkiszę i mnie w [A10] sprowadza się do dodatkowego rozwiązania równań różnicowych. W takim przypadku zmodyfikowana jest tylko prawa strona tych równań, podczas gdy liczba węzłów w chmurze i operatory różnicowe pozostają niezmiennicze. W przypadku estymatorów wygładzających można bezpośrednio wykorzystać wyrażenia korekcyjne dla bardziej dokładnego obliczenia pochodnych rozwiązania. Dodatkowo, wygładzanie tych pochodnych jest wbudowane w aproksymację MWLS i technikę składania pochodnych wyższego rzędu. Dlatego też żadna dodatkowa technika wygładzania (jak znana technika Zienkiewicza-Zhue) nie jest wymagana. Ponadto, lepsze oszacowanie błędów resztkowych można zastosować w estymatorach residualnych typu jawnego (prostszych, ale mniej dokładnych), jak i typu niejawnego. Odpowiednie wyrażenia korekcyjne oblicza się za pomocą standardowego rozwiązania MES oraz rozwinięcia wartości funkcji w szereg Taylora.

Są one stosowane w celu uzyskania rozwiązania wzorcowego MES/BMRS, które można wykorzystać do oszacowania błędu a-posteriori. Warto podkreślić, że takie podejście nie wymaga żadnych dodatkowych informacji o topologii siatki. Wykorzystuje ono tylko te, które zostały wygenerowane a-priori dla analizy MES.

4.6.4 Metoda Monte Carlo z techniką bezsiatkowej ścieżki (kombinacja rozszerzona)

Zaproponowane podejście zostało **opracowane w całości przeze mnie w [A3], uważam je za swoje najważniejsze osiągnięcie, do chwili obecnej**. Opiera się ono na kilku cechach BMRS. Wybrane pryncypia oryginalnego podejścia Monte Carlo (MC) z ustaloną losową ścieżką, umówione powyżej, zostały przeformułowane i rozszerzone. Po pierwsze, potencjalne kierunki każdego kolejnego ruchu muszą być wybrane zgodnie z odpowiednimi kryteriami wyboru kierunku (kryterium odległości, kryterium krzyża, kryterium sąsiadów Voronoi). Co więcej, prawdopodobieństwa wyboru mogą być określone przez schematy różnicowe, generowane za pomocą aproksymacji MWLS nieznanej funkcji. Dodatkowo, te prawdopodobieństwa, a także ostateczna formuła MC powinny uwzględniać anizotropię materiału, warunki brzegowe typu mieszanego, jak również niejednorodne funkcje źródłowe (intensywność obciążenia). Proponowane podejście MC z bezsiatkową ścieżką ma wiele zalet, a mianowicie

- nie wymaga dodatkowej przebudowy pierwotnego problemu brzegowego,
- może być zastosowane do złożonych geometrii i problemów eliptycznych w bardziej ogólnej formie, ponieważ zarówno długość kroku, jak i kierunki ruchu są zmienne, a zatem skutecznie dostosowują się do lokalnego rozkładu węzłów i natury równania,
- bierze pod uwagę wszystkie dane a-priori (np. parametry obciążenia, współczynniki materiałowe, wymiary obszaru),
- dostarcza wyraźną relację typu stochastycznego, wiążącą wielkości wyjściowe (wartości nieznanej funkcji w wybranych punktach) i dane wejściowe (np. parametry obciążenia), dlatego jest szczególnie wygodne w problemach, w których wartości funkcji w wybranych punktach muszą być wielokrotnie obliczane (np. problemy nieliniowe, rozwiązywane w sposób przyrostowo-iteracyjny, problemy niestacjonarne, problemy odwrotne),
- może być dodatkowo sprzężone z dowolnymi metodami deterministycznymi i stochastycznymi, na przykład sprzężenie MC/MES w celu analizy tego samego problemu w kilku podobzariach; w każdym podobzariu, obowiązuje inna metoda (np. zgodnie z wymogami dokładności i ograniczeniami geometrii) i jest ona stosowana oddzielnie, a następnie obliczana jest dodatkowa całka po wspólnym interfejsie, wymuszająca ciągłość rozwiązania i jego pochodnych,
- jest ono bardzo proste i szybkie, szczególnie gdy wysoka dokładność rozwiązania nie jest jednym z najważniejszych aspektów analizy (np. wstępna ocena rozwiązania dla przyszłych procedur iteracyjnych).

Losowy wybór czterech zwrotów dla dwóch wzajemnie prostopadłych kierunków, z równym prawdopodobieństwem każdy, co jest naturalne dla regularnej siatki, nie obowiązuje w przypadku nieregularnych chmur węzłów. Należy zatem zastosować nowe kryteria wyboru kierunku, wykorzystując nieregularny rozkład węzłów. Zarówno całkowita liczba węzłów w takiej konfiguracji (nazywana gwiazdą lub macierzą w analizie MRS), jak i ich rozkład powinny być określone w taki sposób, aby wynikowy schemat aproksymacji pozostał dobrze uwarunkowany i nieosobliwy. Zatem liczba węzłów jest zwykle większa niż jest to wymagane z rzędu operatora różniczkowego. Najprostsze kryterium opiera się tylko na odległości między węzłami. Z kolei, w kryterium krzyża, dla przypadku 2D, najbliższe sąsiedztwo węzła centralnego jest podzielone na cztery strefy. Każda z czterech pól jest przypisana do jednej z tych stref. Określona liczba węzłów (zwykle 2, 3, 4, w zależności od rzędu pochodnych), najbliższej węzła centralnego (punktu), jest wybierana z każdej strefy osobno, dlatego liczba węzłów w gwiazdzie MRS jest zawsze stała. W konsekwencji, równe prawdopodobieństwa kierunku ruchu, odpowiadające standardowemu podejściu MC, nie zachowują się przy heterogenicznym rozkładzie kierunków ruchu.

Dlatego należy ustalić nowe zasady ich obliczania, biorąc pod uwagę nieregularności węzłów. Najbardziej intuicyjna koncepcja opiera się na odwrotnej proporcjonalności między długością mierzoną między dwoma węzłami, odłożoną w kierunku następnego ruchu, a prawdopodobieństwem jego wyboru. Innymi słowy, im dłuższa długość kroku w danym kierunku, tym mniejsze prawdopodobieństwo wyboru tego kierunku. Taka koncepcja może być wdrożona w sposób naturalny przy użyciu MWLS. Gdy znane są potencjalne kierunki następnego ruchu i odpowiednie prawdopodobieństwa wyboru, ogólne zasady procedury losowej ścieżki pozostają niezmodyfikowane. Kolejny element ścieżki jest generowany losowo, do czasu, aż osiągnięty zostanie pierwszy węzeł brzegowy, w którym znamy wartość rozwiązania. W konsekwencji, nie wszystkie węzły brzegowe kończą losową ścieżkę, ponieważ mogą one odpowiadać naturalnym warunkom brzegowym, dla których znamy wartości pochodnych, zamiast samego rozwiązania. Ponadto należy zbudować odpowiednią statystykę trafień we wszystkie węzły (nie tylko brzegowe), odwiedzone w czasie budowy ścieżki. Jest to wymagane z punktu widzenia ostatecznej formuły MC, którą można uznać za aproksymację stochastyczną wszystkich znanych parametrów materiałowych i obciążeniowych zadania.

4.6.5 Łączone podejście MES-AG (kombinacja łączona)

Rozważmy ustalony (niezależny od czasu) problem termiczny (4.1) ze stałym obciążeniem brzegowym (\bar{T}, \bar{q}) . Załóżmy, że wybrane parametry materiałowe i obciążeniowe są nieznane ($\mathbf{P} = [\lambda, \bar{T}, \bar{q}]$) i muszą być wyznaczone na podstawie dodatkowych informacji, mianowicie pomiarów temperatury \hat{T}_i w m_t wyizolowanych punktach wewnętrznych $\hat{\mathbf{x}}_i$

$$\hat{T}(\hat{\mathbf{x}}_i) = \hat{T}_i \pm \Delta T_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_t \quad (4.7)$$

z przypisanymi tolerancjami pomiarowymi ΔT_i w każdym punkcie. Ten problem może być traktowany jako odwrotny problem cieplny (np. wyznaczenie obciążenia termicznego lub/i identyfikacja parametrów cieplnych). Jego podstawowy model matematyczny stanowi nieliniowy problem optymalizacji

$$\mathbf{P}^{(\text{opt})} = \arg \min_{(\mathbf{P})} F(\mathbf{P}), \quad F = \sqrt{\frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{m_t} (T(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{P}) - \hat{T}_i)^2} \quad (4.8)$$

z warunkami ograniczającymi typu nierównościowego

$$|T(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{P}) - \hat{T}_i| \leq \Delta T_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_t \quad (4.9)$$

formułowany na podstawie średniego błędu kwadratowego między zmierzonymi i obliczonymi wartościami temperatury. Różne metody optymalizacji ([R12]), typu deterministycznego, probabilistycznego i złożonego, mogą być zastosowane do rozwiązania (4.8) z (4.9), na przykład bezgradientowe metody wyszukiwania (algorytmy genetyczne lub ewolucyjne) lub metody półanalityczne typu gradientowego (bisekcja, gradienty sprzężone, kierunki dopuszczalne). Niezależnie jednak od rodzaju metody, numeryczne rozwiązanie rozważanego problemu optymalizacyjnego wymaga wielu rozwiązań pomocniczych problemów cieplnych. Dlatego złożoność obliczeniowa metody silnie zależy od wyboru metod pośrednich, a także od liczby zmiennych decyzyjnych (nieznane obciążenie i parametry materiałowe). Następująca strategia numeryczna, **opracowana całkowicie przeze mnie w [A3]**, i łącząca metodę elementów skończonych oraz podejście bazujące na algorytmach genetycznych (MES/AG), została przyjęta:

1. Generacja algebraicznego modelu MES

$$\mathbf{KT}(\mathbf{P}) = \mathbf{F}(\mathbf{P}) \quad (4.10)$$

rozważanego problemu, z macierzą sztywności \mathbf{K} końcowego układu równań, po agregacji. Mimo iż wektor obciążeń węzłowych \mathbf{F} (który zawiera \mathbf{P}) podlega ciągłej modyfikacji, \mathbf{K} pozostaje niezmienną. Dlatego też, jej odpowiednia dekompozycja \mathbf{LL}^t może być przeprowadzona a-priori

(tylko raz), podczas gdy w ramach kolejnych pokoleń genetycznych, wykonuje się tylko krok-wstecz i krok-wprzód ($\mathbf{LV}(\mathbf{P}) = \mathbf{F}(\mathbf{P})$ i $\mathbf{L}^T \mathbf{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{V}(\mathbf{P})$), co prowadzi do uzyskania wektora węzłowych stopni swobody \mathbf{T} . W ten sposób, wyznaczenie $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ wymaga dwóch prostych algebraicznych operacji macierzowych.

2. Generacja startowej populacji $\mathbf{S}^{(0)}$ składającej się z M liczb binarnych z losową selekcją m bitów $\{0, 1\}$ dla każdego osobnika tej populacji. M jest przyjmowane podczas gdy m jest dobierane jako najmniejsza liczba całkowita spełniająca poniższą nierówność

$$(P_{\max} - P_{\min}) \cdot 10^c \leq 2m - 1 \quad (4.11)$$

gdzie $c = 1, 2, 3, \dots$, oznacza liczbę pozycji znaczących każdego osobnika populacji (czyli liczbę cyfr świadczących o rozdzielczości pomiarowej).

3. Wyznaczenie bieżących wartości rozwiązania $\mathbf{P}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, odpowiadających bieżącej populacji $\mathbf{S}^{(k)}$, za pomocą prostej transformacji liczb binarnych na dziesiętne

$$P_i^{(k)} = P_{\min} + \frac{(P_{\max} - P_{\min}) \sum_{j=1}^m 2^{j-1} \cdot s_{j(i)}^{(k)}}{2^m - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4.12)$$

4. Wyznaczenie wartości funkcji celu (4.8) dla każdego osobnika populacji $\mathbf{P}^{(k)}$, za pomocą agregacji wektora prawej strony $\mathbf{F}(\mathbf{P}^{(k)})$, kontynuowanej przez rozwiązanie układu równań (4.10) i finalną obróbkę rozwiązania MES (tj. obliczenie pochodnych rozwiązania).
5. Ciągłe przetwarzanie populacji rozwiązań $(\mathbf{S}^{(k)}, \mathbf{P}^{(k)}) \Rightarrow (\mathbf{S}^{(k+1)}, \mathbf{P}^{(k+1)})$ za pomocą trzech podstawowych operatorów genetycznych, mianowicie

- selekcja (typu ruletkowego), w której każdy osobnik populacji ma przypisane prawdopodobieństwo wyboru

$$p_i = \frac{F(\mathbf{P}_i^{(k)})}{\sum_{j=1}^M F(\mathbf{P}_j^{(k)})} \quad (4.13)$$

które jest wprost proporcjonalne do jego udziału w sumie wartości funkcji celu (4.8); w ten sposób, losowo wybrani osobnicy (zgodnie z rozkładem p_i) przechodzą do kolejnego etapu,

- krzyżowanie, w którym losowo wybrane pary osobników $(\mathbf{s}_i^{(k)}, \mathbf{s}_j^{(k)}) \in \mathbf{S}^{(k)}$ wymieniają części łańcuchów bitowych, przykładowo $\{101|_{m_1} 1001|_{m_2} 1\}$ i $\{111|_{m_1} 0101|_{m_2} 1\}$, gdzie punkty graniczne są również losowo dobierane; prawdopodobieństwo krzyżowania jest zwykle na poziomie $0.6 \leq p_c \leq 0.9$,
- mutacja, w której każdy bit ma przypisaną liczbę losową $r \in [0, 1]$, zgodnie z założonym prawdopodobieństwem mutacji $p_m \leq \frac{1}{(m+1) \cdot M}$. Jeżeli $r \leq p_m$, to ten wybrany bit zmienia się z 0 na 1, lub z 1 na 0.

Podczas gdy operator selekcji wzmacnia najsilniejsze jednostki $\mathbf{S}^{(k)}$, nie tworzy on żadnych nowych. Z drugiej strony, nowi członkowie (nowe kombinacje bitów) mogą być dostarczani przez dwa pozostałe operatory; istnieje jednak ryzyko, że już ustalone optymalne rozwiązanie zostanie zepsute, a w konsekwencji spadnie ogólna jakość rozwiązania. W związku z tym zarówno p_c , jak i p_m powinny maleć w miarę kontynuowania procesu optymalizacji.

6. Zastosowanie kryterium zatrzymania obliczeń, które opiera się na kontroli założonego procentu osobników \mathbf{P} , które maksymalizują (4.8). Ponadto, w obliczeniach praktycznych, jeśli nie ma poprawy jakości rozwiązania po określonej liczbie populacji, proces zatrzymuje się. Ponadto brane są pod uwagę ograniczenia nierównościowe (4.9). Jeżeli jednak kryteria zatrzymania obliczeń nie są spełnione, należy wrócić do trzeciego etapu.
7. Ostateczna analiza termiczna na podstawie najlepszego osobnika ostatniej ustalonej populacji $\mathbf{P}^{(\text{opt})}$ lub, częściej, najlepszego osobnika w ogóle (jaki tylko pojawił się w czasie procesu).

4.6.6 Łączone podejście MLPG/BMRS (kombinacja rozszerzona)

Grupa sześciu różnych sformułowań MLPG, zaproponowanych przez S. Atluriego ([R9]), wykorzystuje starą koncepcję Petrova-Galerkina, w której to funkcja testowa v (zwana też funkcją testującą i zdefiniowana na podobszarze Ω_v) może różnić się od funkcji próbnej T (zdefiniowanej na podobszarze Ω_T). Jedną z funkcji testowych może być zdefiniowana w taki sposób, że jest różna od zera w Ω_v , podczas gdy jest równa zero w innym miejscu, w rozpatrywanym obszarze Ω . Dlatego w MLPG obszar musi być dyskretyzowany za pomocą dowolnie rozłożonych węzłów, bez jakiegokolwiek struktury, narzuconej z góry. Ten rodzaj dyskretnych sformułowań brzegowych wydaje się być naturalny dla metod bezsiatkowych, bowiem można łatwo przypisać lokalne podobszary o prostym regularnym kształcie, do każdego węzła. Podobszar ten stanowi nośnik dla funkcji testującej, gdzie przyjmuje ona wartości niezerowe. W naszych badaniach specjalną uwagę poświęcono MLPG5, w którym funkcja testująca jest określona w postaci funkcji Heaviside'a. W ten sposób funkcja testująca ma stałą wartość w kolejnych podobszarach, przypisanych do każdego węzła. Takie dyskretne sformułowanie (MLPG5) ma wiele zalet. Pośród nich, warto wymienić następujące

- w zasadzie wariacyjnej, wszystkie wyrazy zawierające pochodne funkcji testowej, znikają,
- tylko funkcja próbna musi być aproksymowana przy użyciu jej wartości węzłowych,
- aproksymacja funkcji próbnej może być inna niż aproksymacja funkcji testowej,
- całkowanie jest ograniczone tylko do prostych podobszarów,
- w niektórych przypadkach całkowanie może zostać zredukowane tylko do granicy podobszaru.

Jednak w pierwotnej koncepcji MLPG5 autorstwa S. Atluriego, obszar musi być pokryty prostymi podobszarami przypisanymi do każdego węzła (okręgi, prostokąty, itp.). Mogą one zachodzić na siebie, ale muszą pokrywać cały obszar. Pokazano, jak określić kształt i rozmiar takich podobszarów, by uzyskane wyniki były stabilne i jednoznaczne. Ostateczne wyniki mogą jednak silnie zależeć od sposobu wyboru tych podobszarów. Ponadto metoda (MLPG5) nie może być zastosowana do tych sformułowań, w których różniczkowanie obejmuje tylko i wyłącznie funkcję testową, na przykład niesymetryczna zasada wariacyjna drugiego rzędu, powszechnie stosowana w metodzie podziału jedności. Wszystkie te wady można usunąć w łączonej metodzie MLPG / BMRS, **zaproponowanej przez J. Orkiszę i przeze mnie w [A11]**. Podział obszaru na wielokąty Voronoi staje się wtedy jednoznaczny. Ponadto aproksymacja funkcji próbnej wykorzystuje te same zasady, co w standardowej BMRS (tj. klasyfikacja gwiazd, aproksymacja MWLS, całkowanie na lokalnych podobszarach). Co więcej, takie podejście może zostać rozszerzone na inne typy MLPG, takie jak zupełnie nowe MLPG7, w którym funkcja testująca jest liniowo interpolowana nad trójkątami Delaunay.

4.6.7 Metoda iteracyjna Newtona-Raphsona z optymalną nad-relaksacją, stosowana w BMRS

Badania koncentrują się na kilku nowych propozycjach przyspieszenia iteracyjnych metod rozwiązywania zarówno liniowych, jak i nieliniowych układów równań algebraicznych, generowanych za pomocą dowolnej metody analizy numerycznej. Jednakże podejście oparte na rozwiązaniu BMRS jest szczególnie interesujące, ponieważ może ono wytwarzać nie-pasmowe i niesymetryczne układy równań, dla których iteracyjne metody nie mogą być stosowane bezpośrednio. Podstawowa koncepcja opiera się na sukcesywnej technice nad-relaksacji. Nowy, prosty i skuteczny sposób obliczenia parametru relaksacji, **zaproponowany i opracowany przez J. Orkiszę i przeze mnie w [A8]**, opiera się albo na minimalizacji, albo na eliminacji błędu resztkowego bieżącego rozwiązania. Druga koncepcja efektywnie wykorzystuje cechy nieskończonego postępu geometrycznego. Jego iloraz budowany jest przy użyciu przyrostów rozwiązania w kilku początkowych seriach kolejnych iteracyjnych kroków. Oba mechanizmy akceleracji zostały dodatkowo połączone ze sobą, w celu uzyskania najlepszego przyspieszenia procesu rozwiązania dla układów liniowych równań algebraicznych. Znacząca poprawa zbieżności została również osiągnięta podczas testowania nieliniowych układów (z zrelaksowaną metodą Newtona-Raphsona, [A2]).

4.6.8 Adaptacyjne podejście typu wielosiatkowego dla BMRS

Podejście BMRS, z aproksymacją wyższego rzędu opartą na wyrazach poprawkowych operatorów różnicowych, może być z powodzeniem zastosowane w procesie adaptacyjnym typu h ([R3, R4]). W tym procesie znana jest tylko pierwsza dyskretyzacja. Wszystkie kolejne, gęstsze, muszą być generowane na podstawie odpowiedniego kryterium. Analiza błędów a-posteriori, która wykorzystuje rozwiązanie wyższego rzędu jako rozwiązanie referencyjne wysokiej jakości, została już omówiona powyżej. Dla każdej dyskretyzacji uzyskuje się dwa rozwiązania, mianowicie standardowe (niskiego rzędu) i jego odniesienie, rozwiązanie wyższego rzędu. Ich względna różnica estymuje prawdziwy nieznany błąd rozwiązania. Dlatego nowe węzły są generowane w lokalizacjach, w których różnica ta osiąga najwyższe wartości, podczas gdy położenia starych węzłów pozostają nienaruszone. Najpoważniejsza wada tego podejścia dotyczy wymogu rozwiązania wielu układów równań, a liczba niewiadomych gwałtownie rośnie. Jednak tę wadę można rozwiązać bez większych trudności, gdy stosuje się podejście wielosiatkowe. W podejściu wielosiatkowym, układ jest rozwiązywany w dokładny sposób na pierwszej, najrzadszej chmurze węzłów (początkowej dyskretyzacji). Zamiast bezpośredniego rozwiązania układów dla kolejnych gęstszych chmur, cała informacja dotycząca macierzy współczynników oraz wektorów prawych stron jest transportowana pomiędzy gęstszymi chmurami i najrzadszą z nich. Dokonuje się tego za pomocą dwóch operacji numerycznych, a mianowicie prolongacji (która interpoluje rozwiązanie od rzadszej do gęstszej chmury) i restrykcji (która redukuje błąd resztkowy z chmury gęstszej do chmury rzadszej). Oryginalne koncepcje prolongacji i restrykcji, **zaproponowane przez J.Orkiszę w [R5] i później opracowane przeze mnie w [A9]** dla BMRS, zastosowane w tych badaniach, oparte są, odpowiednio, na kolokacji różnicowej i zasadzie równej wirtualnej pracy. Dodatkowo, błąd residuum jest estymowany dwukrotnie, dla rozwiązań o niskim i wyższym rzędzie (**oryginalna koncepcja, zaproponowana przeze mnie w [A9]**). W drugim przypadku odpowiada on wprost wyrazom korekcyjnym. Podejścia BMRS, adaptacyjne (chmury generowane za pomocą technik analizy błędów a-posteriori) i nieadaptacyjne (zestaw chmur jest znany a-priori), zarówno w wersji tradycyjnej jak i wielosiatkowej, zostały zastosowane do rozmaitych problemów mechanicznych, w tym z dodatkowym sprzężeniem ze zbiorami rozmytymi (metoda analizy problemów z różnymi poziomami niepewności parametrów materiału i obciążenia [R10]) i z metodą Monte Carlo optymalnego wyboru kombinacji obciążeń (dla oceny niezawodności konstrukcji).

4.7 Opis otrzymanych rezultatów

Ten podrozdział jest zorganizowany w następujący sposób. Zastosowania w mechanice wszystkich kombinacji proponowanych metod są zaprezentowane osobno, zgodnie z zagadnieniami rozpatrywanymi w kolejnych pracach, zawartych w serii publikacji. Dla każdego artykułu przedstawiono krótką dyskusję o nowatorskich pomysłach i koncepcjach w nim zawartych, z uwypukleniem tych zaproponowanych i opracowanych przeze mnie.

4.7.1 Analiza termicznych, mechanicznych oraz termo-mechanicznych problemów za pomocą łączonej MES-BMRS

W [A5], przybornik programu Matlab został **opracowany całkowicie przeze mnie**. Służy on do efektywnego generowania chmur węzłów (bez narzuconej struktury, do analizy BMRS) i trójkątnych siatek (dla analizy MES), dla przypadków 2D. Ten pakiet obliczeniowy może być stosowany w równoległej analizie numerycznej problemów brzegowych mechaniki i inżynierii lądowej za pomocą łączonego podejścia MES-BMRS. Najbardziej nowatorskimi i ważnymi cechami zastosowanych algorytmów generacyjnych są:

- możliwa równoległa analiza kilku rozłącznych podobszarów,
- zastosowana reprezentacja brzegowa geometrii obszaru,
- generowanie węzłów odbywa się za pomocą określonych funkcji gęstości,

- można zastosować regularne rozkłady węzłów i losowo zaburzone chmury węzłów,
- granica obszaru może składać się z prostych i zakrzywionych krawędzi dowolnego typu; w przypadku zakrzywionych krawędzi bazowe położenia węzłów są określane ze stałą długością łuku,
- można analizować również obszary z otworami o dowolnym kształcie,
- wszystkie techniki oparte są na prostych formułach geometrycznych.

Podstawowym założeniem wszystkich opracowanych kodów programu Matlab jest to, że są one oparte na dobrze znanych funkcjach (*meshgrid*, *delaunay*), które zostały rozszerzone do bardziej ogólnych przypadków. Wszystkie nowe pliki Matlabu mogą być stosowane bez większych trudności w większych fragmentach kodów. Produkują one wektory i macierze z jawnymi interpretacjami geometrycznymi. Wszystkie procedury zbadalem na wybranych przykładach mechanicznych. Uwzględniłem zarówno algorytmy generowania, jak i analizę numeryczną problemów Poissona 2D (stacjonarny przepływ ciepła oraz skręcanie pryzmatycznego pręta).

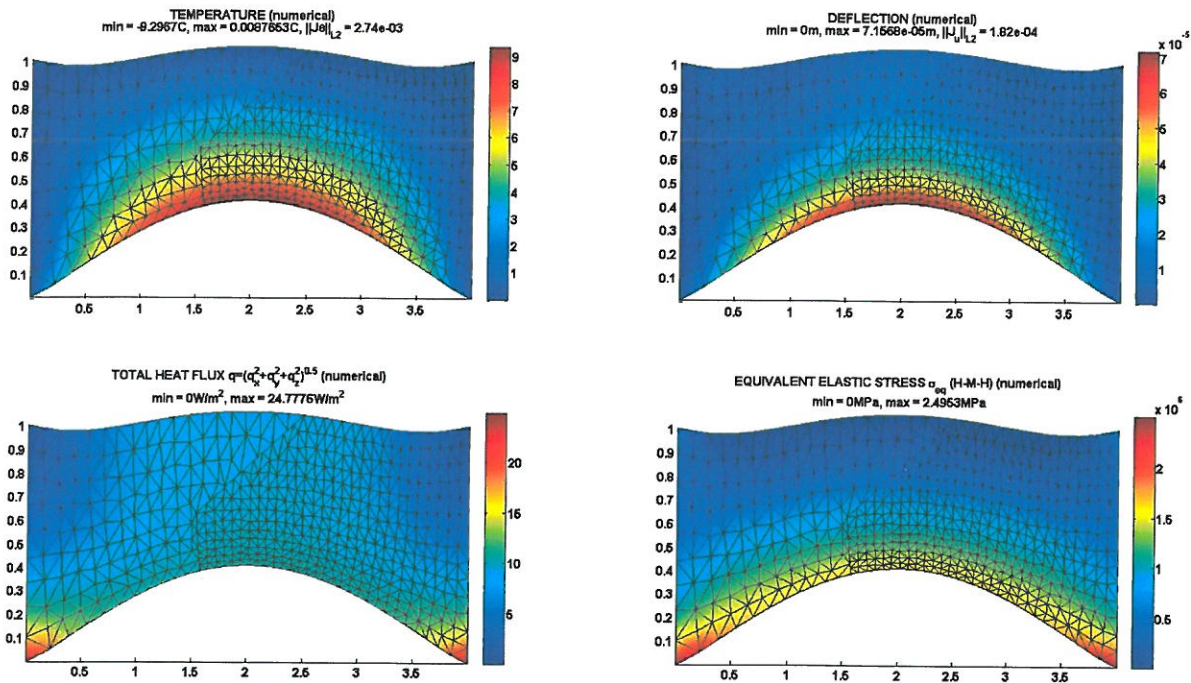
W [A7], analizowane są problemy termiczne 2D i 3D za pomocą łączonej MES-BMRS. Dwie metody są sprzężone w dwóch lub w większej liczbie rozłącznych podobszarów, które są dyskretyzowane za pomocą całkowicie niezależnych siatek / chmur węzłów, bez wymogu jakichkolwiek wspólnych cech na interfejsie podobszaru (niezgodne aproksymacje). Jedynym dodatkowym elementem dodawanym do zasady wariacyjnej, pochodzącej od (4.1), jest odpowiedni składnik całkowity, który jest obliczany wzdłuż tego interfejsu (krzywa / linia w 2D lub powierzchnia / płaszczyzna w 3D), i która łączy te podobszary w jeden obszar. Podobna koncepcja jest stosowana do spełnienia warunków brzegowych typu podstawowego (Dirichleta) dla całego brzegu na raz, niezależnie od rodzaju dyskretyzacji wewnętrznej. Analizowana jest dokładność rozwiązania, a także efektywność metody, które wskazują na jej duży potencjał.

W [A6], uwaga skupiona jest na termo-mechanicznym problemie początkowo-brzegowym (4.1) i (4.2). Został on rozwiązany za pomocą metody obliczeniowej, która łączyła dwa dobrze znane podejścia dyskretne: MES i BMRS. Podobnie jak wyżej, obszar zadania został podzielony na dwie lub większą liczbę podobszarów, z nieciągłymi aproksymacjami na granicy. Mimo to, ostateczne rozwiązanie jest ciągle w ramach założonej precyzji, odpowiadającej jednemu parametrowi skalarnemu, wspólnemu dla obu pól, a mianowicie szerokości granicy pomiędzy podobszarami. Ta szerokość zależy tylko od gęstości siatki i parametrów aproksymacji. Jest też wspólna dla obydwu pól (termicznego i mechanicznego). Zaproponowane podejście jest zilustrowane wybranymi przykładami, w tym problemami czysto mechanicznymi i termomechanicznymi, rozpatrywanymi w 2D i 3D. Wykazano, że uzyskuje się podobne, porównywalne wyniki, niezależnie od lokalizacji interfejsu, która nie ma istotnego wpływu na ostateczne wyniki.

Wszystkie przykłady liczbowe, przedstawione w [A6, A7], zostały zaprojektowane i wykonane przeze mnie. Reprezentatywne wyniki uzyskane dla płytki prostokątnej, zamocowanej na dwóch krawędziach, przedstawiono na rys. 1. Niezerowy strumień ciepła jest przyłożony do dolnej krawędzi. BMRS (lewy podobszar) wykorzystuje rzadszą chmurę węzłów i drugi rząd aproksymacji, podczas gdy MES (podobszar po prawej stronie) bazuje na gęstszej siatce elementów trójkątnych z interpolacją liniową. Pomimo tych różnic, stopień nieciągłości rozwiązań i ich pochodnych jest podobny jak poziom błędu rozwiązania. Normy błędów są wyświetlone w tytułach wykresów.

4.7.2 Analiza problemów termicznych za pomocą ulepszonej MES-BMRS

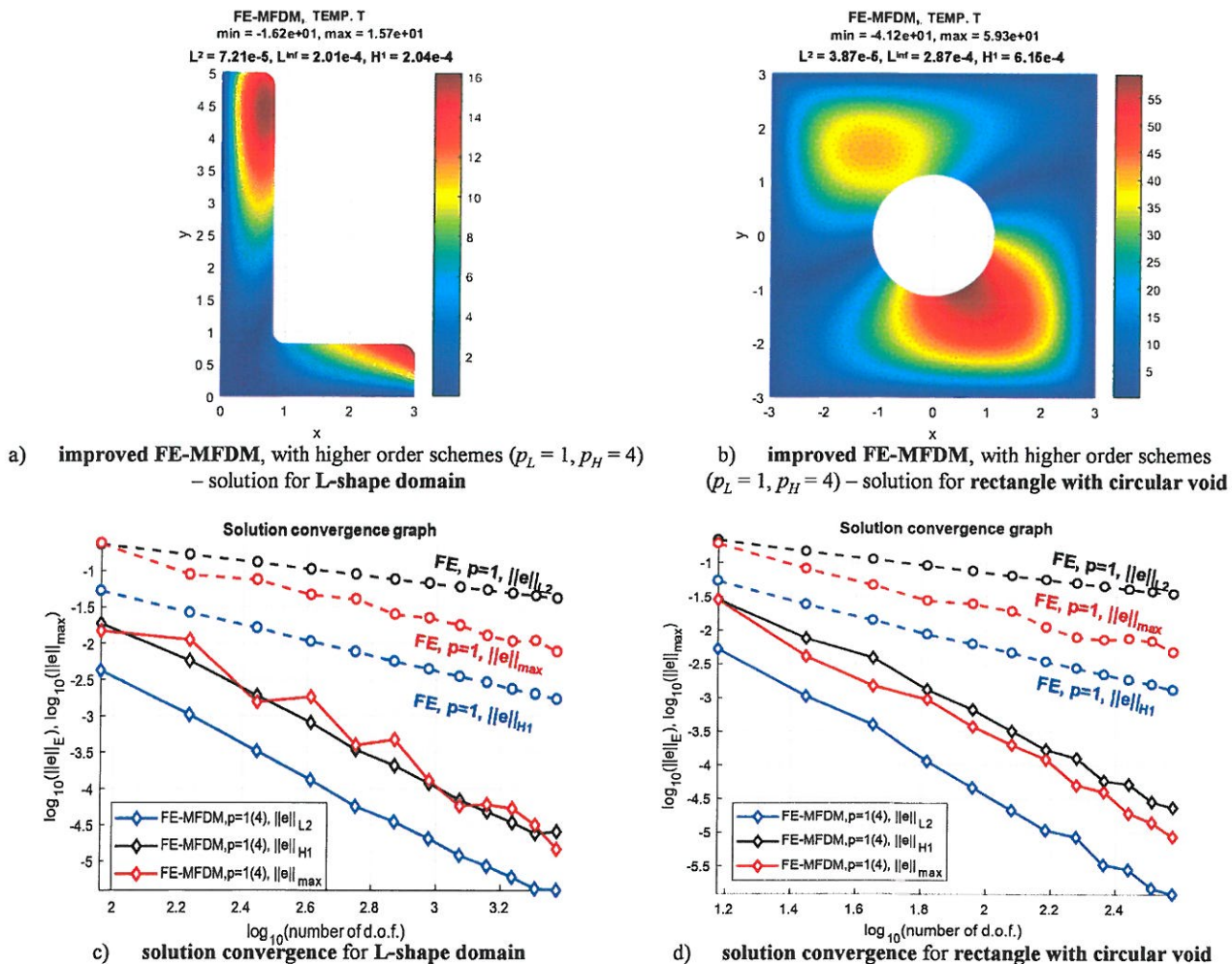
W [A1], ulepszona metoda MES-BMRS (opracowana całkowicie przeze mnie) skonfrontowana jest ze standardowym podejściem MES, wykorzystującym elementy skończone wyższego rzędu, na przykładzie analizy problemów cieplnych (4.1). Wyrazy poprawkowe mogą być zastosowane do standardowego schematu MES, w oparciu o wariacyjne sformułowanie problemów eliptycznych, prowadzące do prostej, iteracyjnej procedury. Podstawowe rozwiązanie MES, odpowiadające najprostszej interpolacji bazującej na funkcjach kształtu, jest wzbogacone o wyrazy korekcyjne tych funkcji, budowane za pomocą technik bezsiatkowych, w węzłach i w punktach całkowania. Pozwala to na znaczne zmniejszenie wysiłku obliczeniowego, ponieważ zarówno liczba węzłów, jak i punkty całkowania w elemencie



Rysunek 1: Rezultaty otrzymane dla zadania termo-mechanicznego 2D: temperatura, przemieszczenia, norma strumienia ciepła i zastępcze naprężenie Hubera-Misesa

skończonym mają odpowiadać podstawowemu rzędowi interpolacji. Z drugiej strony, końcowe rozwiązanie wyższego rzędu, otrzymane z iteracyjnego schematu ze zmodyfikowanym globalnym wektorem obciążenia, odzwierciedla zarówno cechy elementowe (na przykład wysoką dokładność temperatury), jak i cechy bezsiatkowe (np. wysoką dokładność strumienia ciepłego). Proponowane podejście jest testowane na rozmaitych przykładach, z różnymi typami geometrii obszarów i rozwiązaniem wzorcowym. Uwzględniono zarówno regularne jak i nieregularne siatki, a także arbitralnie nieregularne chmury węzłów. Przedstawiono zastosowanie rozwiązania wyższego rzędu do oszacowania błędów i procesu adaptacji. Na koniec pokazano wyniki analizy zbieżności, przeprowadzonej na ciągu siatek / chmur z rosnącą liczbą węzłów. Osiągnięto znaczną poprawę tempa zbieżności (ponad 100 razy w skali liniowej).

Reprezentatywne wyniki (wszystkie zostały przygotowane przeze mnie, z wyjątkiem siatek MES, które zostały wygenerowane przy znacznej pomocy ze strony R.Putanowicza), przedstawiono na rys. 2. W przypadku obu obszarów, stosowano mieszane warunki brzegowe, a mianowicie $\bar{T} = 0$ na $\partial\Omega_e$ (na lewej i dolnej krawędzi obszaru typu L oraz na wszystkich zewnętrznych krawędziach prostokąta), $\bar{q} = -10$ (dla pozostałych częściach brzegu) oraz funkcję intensywności obciążenia $f(x, y) = 10x - 20y$ i współczynniki materiałowe $\lambda_x = \lambda_y = 1$. Wygenerowano nieregularne, adaptacyjne chmury węzłów w liczbie dwunastu. Do analizy zbieżności stosuje się rozwiązanie odniesienia MES, otrzymane na bardzo gęstej siatce (z $n = 12580$ węzłów podstawowych) i $p = 4$ (czyli bardzo wymagające obliczeniowo). Jego wyznaczenie wymagało 10 minut pracy (komputer z 6 GB pamięci RAM i procesorem 2,80 GHz), natomiast obliczenia wymagane dla ulepszonego rozwiązania MES-BMRS i wykonywane na najgęstszej siatce zabrały tylko kilkanaście sekund. Można zaobserwować dużo dokładniejsze wyniki i bardzo wysokie współczynniki zbieżności (z poprawą przekraczającą 2 w skali półlogarytmicznej), gdy porównuje się standardową MES i ulepszone podejście MES-BMRS.



Rysunek 2: Rezultaty analizy zbieżności uzyskane na ciągu siatek nieregularnych, adaptacyjnych, dla ulepszonej MES-BMRS, w geometrii typu L (a,c) i prostokącie z otworem kołowym (b,d), dla nieznanego rozwiązania analitycznego

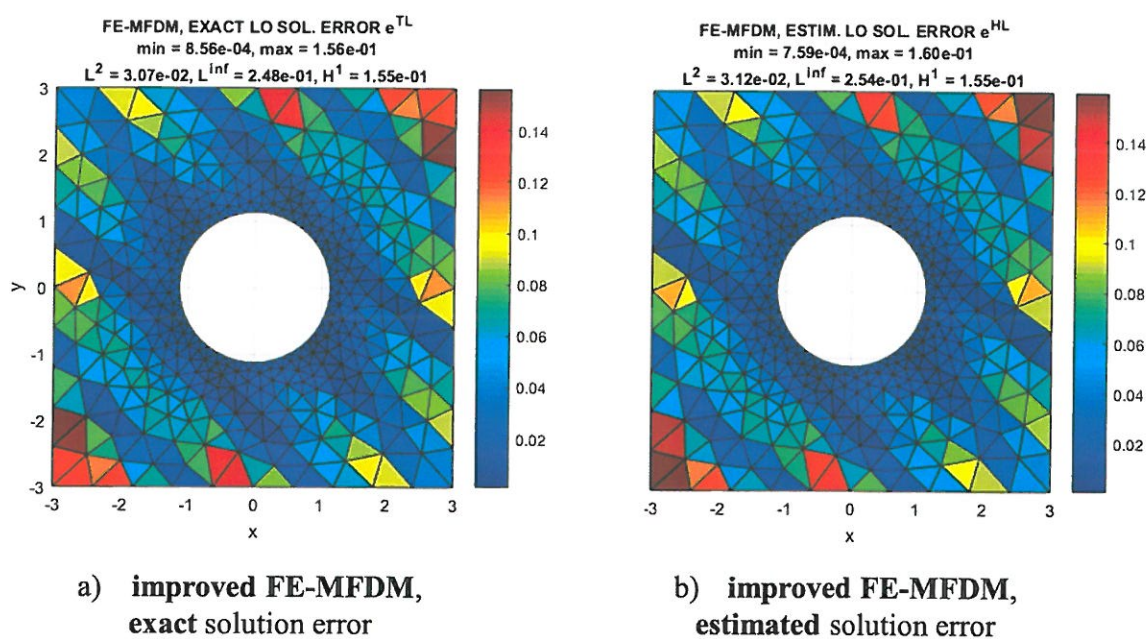
4.7.3 Analiza błędu a-posteriori rozwiązania MES dla problemów termo-mechanicznych za pomocą BMRS

W [A10] (i częściowo w [A1]), zaproponowano prosty i skuteczny sposób oszacowania błędu rozwiązania (autorstwa J.Orkisha i mojego w [A10], a całkowicie mojego w [A1]). Wykorzystuje on koncepcję rozwiązania odniesienia wyższego rzędu, które można zastosować zarówno w BMRS, jak i w MES. Opiera się ono na dodatkowych wyrazach korekcyjnych, które pochodzą z rozwinięcia nieznanej funkcji w szereg Taylora. Wyrazy te składają się z pochodnych wyższego rzędu, a także ze skoków i nieciągłości rozwiązania. Modyfikują one prawe strony równań algebraicznych, dostarczając rozwiązania o znacznie zwiększonej dokładności, bez konieczności wprowadzania nowych węzłów lub nowych nieznanych do chmury węzłów czy też siatki elementów. Estymacje błędu rozwiązania wyższego rzędu są porównywane z tymi, które są powszechnie stosowane w innych metodach dyskretnych, szczególnie w MES. To porównanie obejmuje estymatory hierarchiczne, wygładzające i niejawnie resztkowe. Wszystkie one potrzebują wysokiej jakości rozwiązania odniesienia jako odpowiednika nieznanego rozwiązania analitycznego. Można zastosować tutaj rozwiązanie wyższego rzędu ($2p$ -tego), gdzie p jest podstawowym rzędem interpolacji/aproksymacji. Dzięki temu uzyskuje się o wiele dokładniejsze wyniki, przy mniejszym wysiłku obliczeniowym, pod względem indeksu efektywności. W tym przypadku, indeks ten jest równy prawie dokładnie jeden (gdzie jeden jest wartością doskonałą, odpowiadającą prawdziwemu błędowi rozwiązania). Seria wykonanych obliczeń dla zadań termicznych dała bardzo zachęcające rezultaty. Przykładowe wyniki przedstawiono na rys. 3. Dokładny błąd rozwiązania MES jest skonfrontowany z estymatorem hierarchicznym wyższego rzędu, uzyskanym przy użyciu technik bezsiatkowych, dla prostokątnego obszaru z okrągłym otworem.

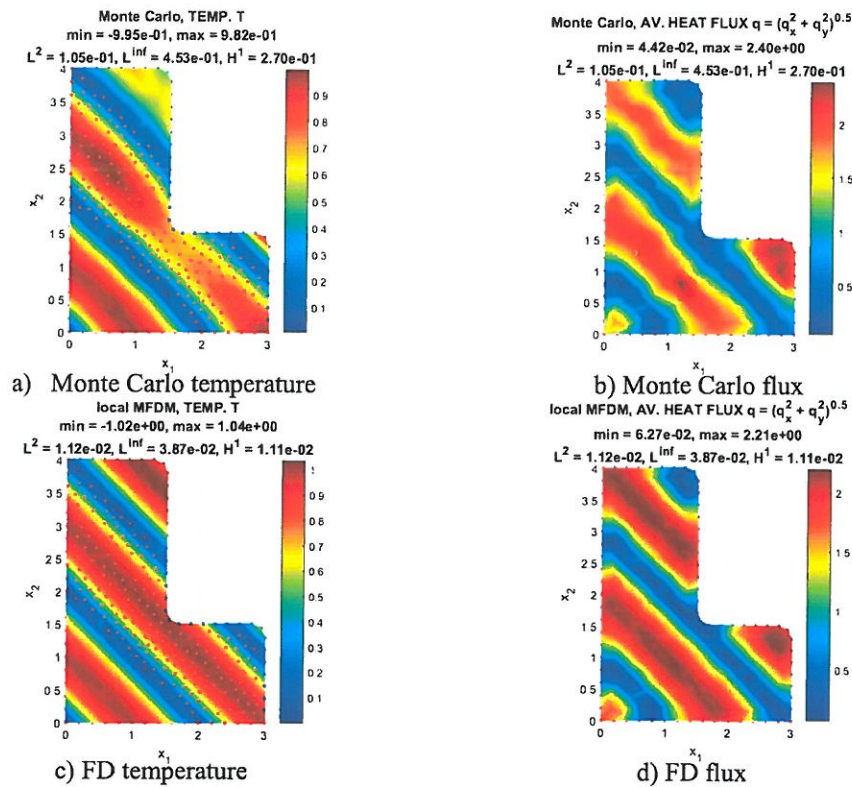
4.7.4 Analiza problemów termicznych za pomocą metody Monte Carlo z bezsiatkową ścieżką

W [A4], zmodyfikowana, bezsiatkowa wersja metody Monte Carlo (MC) z techniką losowej ścieżki została **zaproponowana wyłącznie przeze mnie** i przetestowana na różnych problemach eliptycznych, w tym stacjonarnych problemach termicznych. Metoda opiera się na wybranych metodach dyskretyzacji i aproksymacji, typowych dla metod bezsiatkowych. W porównaniu do oryginalnej metody MC z ustaloną losową ścieżką, pozwala ona na analizę szerszej klasy równań eliptycznych, z niejednorodną funkcją prawej strony, materiałem anizotropowym oraz mieszanymi (podstawowymi i naturalnymi) warunkami brzegowymi. Ponadto mogą być stosowane dowolnie nieregularne siatki, jak również niestrukturalne chmury węzłów, przypisane do bardziej złożonych kształtów geometrycznych. Metoda MC z bezsiatkową ścieżką opiera się na konstrukcji losowej ścieżki ruchów, poczynawszy od określonego punktu (węzła), w którym wymagane jest rozwiązanie. Prawdopodobieństwa wyboru kolejnych kierunków zależą od konfiguracji aktualnych węzłów (gwiazda BMRS), a także od współczynników różnicowych odpowiadających operatorom różniczkowym, uzyskanych za pomocą aproksymacji metodą MWLS. Wreszcie, zastosowaną koncepcję Monte Carlo, zgodnie z którą losowa ścieżka kończy się w węźle brzegowym, położonym na części brzegu z podstawowymi warunkami brzegowymi (ze znanym rozwiązaniem). Stąd możliwa jest szybka, efektywna i dokładna estymacja rozwiązania BMRS w węźle, bez konieczności generowania dużego układu równań, łączącego wszystkie nieznane wartości funkcji. Jest to pomocne w przypadkach, gdy metody deterministyczne zawodzą (np. z powodu osobliwości rozwiązań) lub mniejszej dokładności rozwiązania (na przykład z powodu niskiej jakości siatki / chmury). Ponadto omówiono pełną analizę (dogodną dla zrównoleglenia obliczeń) wszystkich węzłów wewnętrznych i brzegowych z nieznanym rozwiązaniem, z dodatkowym alternatywnym wygładzaniem rozwiązania węzłowego, co poskutkowało zmniejszeniem systematycznego błędu. Dodatkowo podejście pozwala na przybliżoną ocenę początkowego rozwiązania w przypadku problemów nieliniowych lub niestacjonarnych, rozwiązywanych w sposób iteracyjny. Można jednak zauważyć kilka poważnych wad proponowanej metody, w tym:

- optymalna równowaga pomiędzy chmurą gęstości węzłów (liczba węzłów n i / lub (średni) rozmiar siatki h) a liczbą losowych ścieżek N powinna być sformułowana albo a-priori (na podstawie cech



Rysunek 3: Rzadka pośrednia chmura węzłów ($n = 384$) z wykresami ścisłego (a) i estymowanego (b) błędu rozwiązania, obliczeniowego dla każdego elementu skończonego, dla prostokąta z kołowym otworem, dla ulepszonej MES-BMRS, ze znanym rozwiązaniem analitycznym w postaci funkcji trygonometrycznej



Rysunek 4: Rezultaty analizy ustalonego przepływu ciepła dla L-kształtu; a) temperatura wg Monte Carlo, b) strumień ciepła wg Monte Carlo, c) temperatura wg BMRS, d) strumień ciepła wg BMRS

problemu) lub a-posteriori, za pomocą stochastycznej analizy błędów i adaptacyjnego rozkładu węzłów, odpowiadającego oszacowaniu błędu rozwiązania;

- czas obliczeniowy i złożoność techniki losowej ścieżki silnie zależy od odległości między określonym punktem, a brzegiem obszaru, z warunkami podstawowymi, a także liczbą znajdujących się na nim węzłów; chociaż zastosowano prostą modyfikację proponowanej metody, rozwiązująca ten problem, kwestię tę należy zbadać w bardziej szczegółowy sposób.

Reprezentatywne wyniki przedstawiono na rys. 4. Geometria typu L została przyjęta (podobnie jak w poprzednim przykładzie), z warunkami brzegowymi zarówno typu podstawowego, jak i naturalnego. Ponadto zastosowano model dyskretyzacji za pomocą nieregularnie rozłożonych węzłów, o liczebności $n = 348$. Funkcje obciążenia termicznego (\bar{T}, f, \bar{q}) zostały utworzone na podstawie rozwiązania analitycznego $\bar{T}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2}\right)$; przyjęto też funkcje materiałowe $\lambda_x = x^2$ i $\lambda_y = y^2$. Liczba losowych ścieżek została ustawiona na $N = 3000$. Zaprezentowano następujące wykresy: rozwiązania Monte Carlo dla temperatury i średniego strumienia ciepła oraz równoważne rozwiązania BMRS. Dodatkowo, ściśle błędy rozwiązania numerycznego (w odniesieniu do analitycznych rozwiązań) zostały oszacowane w normach L^2 , L^{inf} oraz semi-normie H^1 i przedstawione w postaciach liczbowych. Chociaż wyniki Monte Carlo są mniej precyzyjne, ogólna jakość rozwiązania jest rozsądna, szczególnie w porównaniu do założonego rozwiązania analitycznego \bar{T} i odpowiednich rozwiązań BMRS. Dodatkowo, ich otrzymanie jest znacznie prostsze (jedna formuła na każdy węzeł z nieznaną wartością temperatury).

4.7.5 Analiza odwrotnych problemów kratowych za pomocą łączonej metody MES-AG

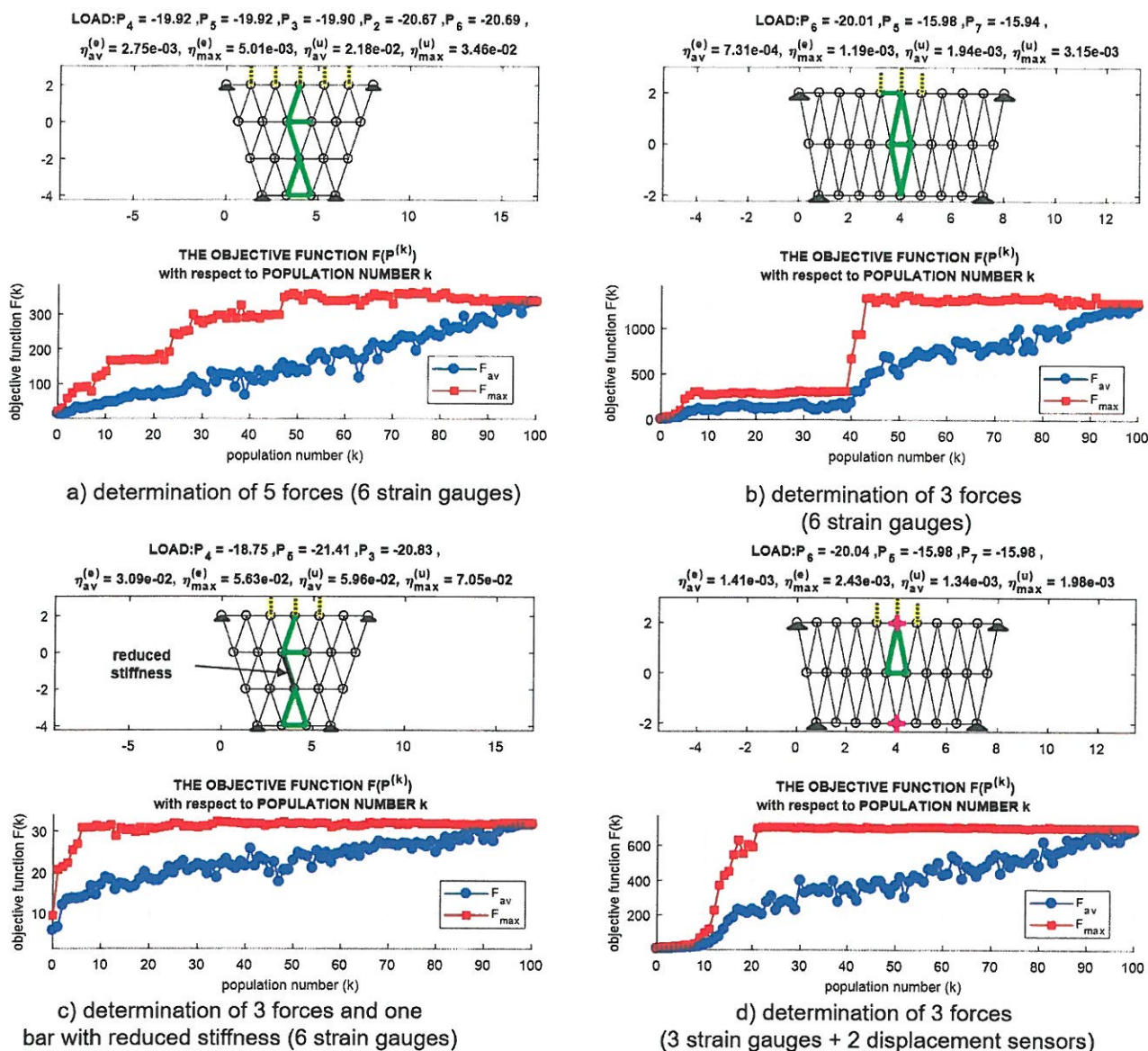
W [A3], podejście bazujące na połączeniu algorytmów genetycznych (GA) oraz standardowej metody elementów skończonych (MES) zostało **zaproponowane i opracowane całkowicie przeze mnie**. W szczególności podejście to zostało zaprojektowane i przetestowane pod kątem problemu odwrotnego płaskiej kratownicy, a mianowicie odzyskiwania jej pełnego stanu statycznego (przemieszczenia, odkształcenia, naprężenia). Dodatkowe informacje pochodzą z danych pomiarowych, w tym pomiarów odkształceń w wybranych prętach, wykonywanych za pomocą czujników odkształcenia zamocowanych do elementów konstrukcyjnych. Co więcej, dane te mogą być uzupełnione pomiarami przemieszczenia, jeśli są one dostępne. W tym celu, rozwiązano problem nieliniowej optymalizacji z ograniczeniami wynikającymi z tolerancji pomiarowej. Struktura MES jest stosowana jako narzędzie dyskretyzacji i aproksymacji rozwiązania konkretnego problemu kratownicy ze znaną lokalizacją i wartością sił. Z drugiej strony, AG są odpowiedzialne za zorientowane na problem przeszukiwanie dopuszczalnej przestrzeni rozwiązań (osobników populacji) przez określoną liczbę pokoleń genetycznych. Obliczenia są przeprowadzane do momentu spełnienia odpowiednich kryteriów ich zatrzymania. Zaproponowany algorytm rozwiązania został przeanalizowany pod kątem różnych problemów związanych z kratownicą, z różnymi parametrami dotyczącymi dokładności rozwiązania, dopuszczalnej przestrzeni rozwiązań, liczby nieznanych sił, a także liczby czujników. Za każdym razem porównania między pierwotnym statycznym stanem (który służył jako źródło symulowanych danych eksperymentalnych), a odzyskanym wskazywały na bardzo dobrą zgodność ostatecznych wyników. Poza określeniem zewnętrznego obciążenia kratownicy, algorytm ten został zastosowany do nowatorskiej identyfikacji uszkodzonych czujników odkształcenia, jak również do nowatorskiego projektu optymalnej liczby czujników odkształcenia, dla określonego rozmiaru kratownicy.

Reprezentatywne wyniki przedstawiono na rys. 5 dla czterech wybranych typów geometrii kratownicy i konfiguracji obciążeń (to znaczy sił skupionych, przyłożonych do węzłów pasów górnych). Pierwotne wartości obciążenia wynoszą 10 kN, 15 kN i 20 kN. Na tej podstawie symulowano dane pomiarowe odkształcenia i przemieszczenia (odpowiednio: pręty kratownicy zaznaczone na zielono i węzły oznaczone czerwonym krzyżykiem), z oryginalnymi wartościami zakłóconymi losowym szumem. Odzyskane wartości obciążeń, uzupełnione normami różnic pomiędzy odzyskanymi odkształceniami i odkształceniami założonymi, są podawane w postaciach liczbowych. Ponadto, dla każdego przypadku, wykresane są średnie i maksymalne wartości funkcji celu (4.8), w odniesieniu do numeru pokolenia genetycznego.

4.7.6 Analiza geometrycznie nieliniowych problemów termo - sprężystych za pomocą BMRS i metody Newtona - Raphsona z nad-relaksacją

W [A9] zaproponowaliśmy (J.Orkisz i ja) dwie nowe, proste koncepcje przyspieszenia metod rozwiązywania iteracyjnego dla układu równań algebraicznych (liniowych i nieliniowych). Pomysły te obejmują optymalne podejście nad-relaksacji, ze zmiennym parametrem, minimalizującym błąd resztkowy, a także podejście bazujące na ciągu geometrycznym, którego iloraz budowany jest na kolejnych przyrostach rozwiązania, w oparciu o sumę nieskończonej liczby wyrazów przyrostu rozwiązania. Pomysły te są stosowane do iteracyjnej metody Gaussa-Seidla (G-S), dla liniowego układu równań i iteracyjnej metody Newtona-Raphsona (N-R), dla nieliniowego układu równań. Uzyskane wyniki są bardzo zachęcające. Testy numeryczne wskazują na dużą poprawę współczynnika zbieżności do 200 razy dla G-S i kilka razy (do 10) dla N-R, jak również redukcję liczby iteracji dla pasmowych i pełnych układów liniowych. Korzyści są największe w przypadku dobrze uwarunkowanych układów. Przedstawiono wybrane przykłady inżynierskie, w których układy równań są generowane za pomocą standardowych podejść różnicowych (siatek regularnych) i bezsiatkowych MRS (nieregularne chmury węzłów), a mianowicie ugięcia geometrycznie nieliniowej belki zginanej oraz ugięcie idealnej membrany.

Rys. 6 przedstawia porównanie typowej zbieżności rozwiązania (błędy w normach średnich i maksymalnych) dla standardowego niezrelaksowanego N-R (górny wykres) oraz zrelaksowanego N-R, z dwoma parametrami (dolny wykres). W tym szczególnym przypadku wykonywane są obliczenia dla



Rysunek 5: Wybrane rezultaty łączonej analizy MES-AG w odwrotnych problemach kratowych

problemu zginania idealnej membrany z kołowym przekrojem i silnie nieregularną chmurą z 377 węzłami. Jak można zauważyć, pierwsza metoda wymaga 2268 kroków iteracji, podczas gdy druga - tylko 259. Ponadto całkowity czas obliczeniowy wyniósł 313 sekundy, w pierwszym przypadku i tylko 8 sekund, w drugim przypadku. Zmniejszenie liczby iteracji nie wymaga znacznie więcej nakładu obliczeniowego.

W [A2] omówiono analizę 3D rzeczywistego problemu technicznego, a mianowicie deformacji kabli napowietrznych linii energetycznych. Opracowane zostały niezawodne nieliniowe modele mechaniczne i matematyczne, oparte na dużych przemieszczeniach, małych odkształceniach, termo-elastycznym prawie konstytutywnym i klasycznych zasadach termomechanicznych (**autorstwa J.Orkisz, W. Cecota i mojego**). Ze względu na rzeczywiste problemy inżynierskie, szczególną uwagę przyłożono do niezawodności wyników i wydajności obliczeń. Dlatego zbadano kilka niezależnych podejść do rozwiązania tego problemu. Najważniejsze nowe elementy, zawarte w pracy, są następujące (**te opracowane tylko przeze mnie zostały pogrubione**):

- seria nieliniowych **modeli 1D, 2D i 3D**, z dużymi przemieszczeniami oraz rozciągliwymi i nierozciągliwymi kablami,
- **mocne, słabe i mieszane sformułowania problemu**,
- kilka metod analizy dyskretniej (MES, BMRS, MLPG-5 z BMRS),
- wymuszenie **różnych rzędów** aproksymacji funkcji przemieszczeń kabla,
- **zmienne gęstości siatki**,
- różne metody analizy nieliniowej (standardowa Newtona-Raphsona vs. **N-R z relaksacją, z jednym lub dwoma parametrami**),
- różne sposoby budowania modeli składających się z kabli, słupów i łańcuchów izolatorów,
- trzy niezależnie opracowane programy komputerowe (dwa oryginalne **własne kody** i jedno komercyjne oprogramowanie),
- **walidacja** modelu, czyli porównanie wyników obliczeń z pomiarami.

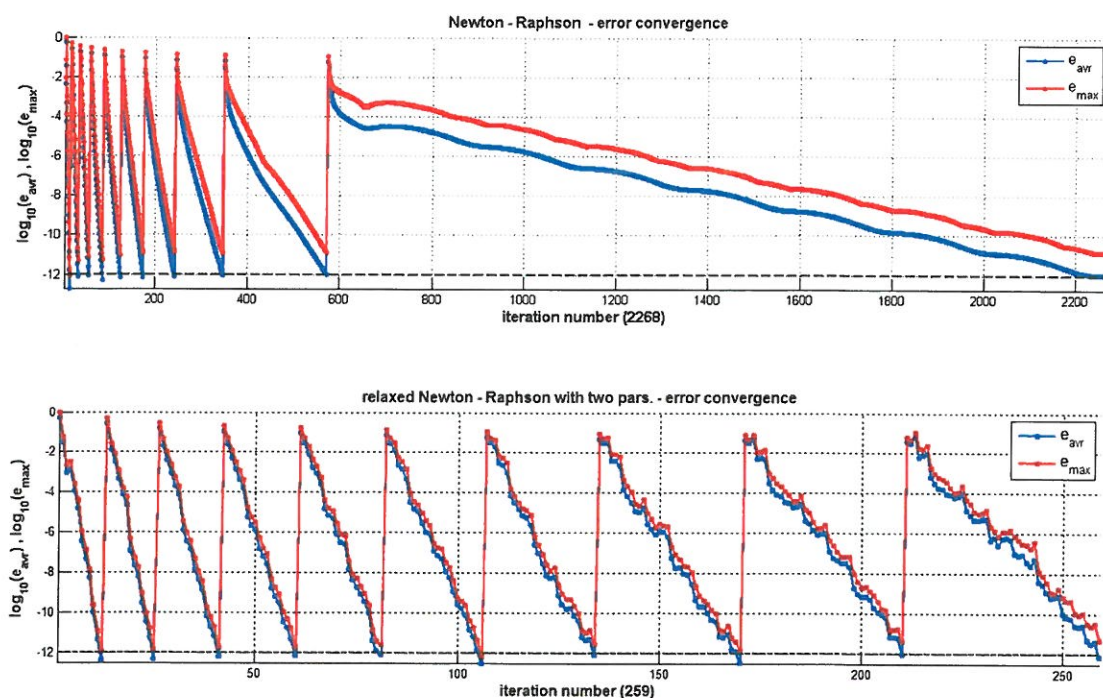
4.7.7 Analiza problemów termicznych za pomocą podejścia MLPG-BMRS

W [A11] rozważa się połączenie BMRS z oryginalną koncepcją sformułowań typu MLPG, zaproponowanych przez S.Atluriego. Przybliżenie nieznanej funkcji bazuje tylko na jej wartościach węzłowych. Zasada wariacyjna jest spełniona lokalnie w podobszarach, podczas gdy funkcja testowa może różnić się od funkcji próbnej. Opracowano kombinację MLPG5-BMRS (**autorstwa J.Orkisz i mojego**), w której funkcję testującą przyjmuje się jako funkcję schodkową Heaviside, nad wielokątami Voronoi. Ponadto stosuje się najnowsze (aktualne) osiągnięcia w dziedzinie BMRS, w tym aproksymację wyższego rzędu, ulepszoną analizę błędów a-posteriori, a także ulepszone podejście adaptacyjne. Szczególnie interesujące są wyniki uzyskane za pomocą kombinacji MLPG5 i BMRS, w odniesieniu do ich precyzji i wydajności samych algorytmów. Testy numeryczne 1D i 2D odzwierciedlają porównywalną jakość wyników MLPG5/BMRS z wynikami uzyskanymi za pomocą standardowych sformułowań problemów brzegowych (np. mocnych lub wariacyjnych). Jednak MLPG5/BMRS wymaga mniej nakładu obliczeniowego, ze względu na prostotę funkcji testowej i jej nośników. Wysoką jakość rozwiązania uzyskuje się, gdy uwzględnione są wyrazy wyższego rzędu.

W [A2], koncepcja rozwiązania MLPG5/BMRS jest stosowana do analizy numerycznej kabli napowietrznych linii elektrycznych, w oparciu o nieliniowy model kabla rozciągliwego.

4.7.8 Analiza problemów termicznych i mechanicznych za pomocą adaptacyjnej wielosiatkowej BMRS

W [A9], wśród różnych aplikacji podejścia BMRS typu adaptacyjnego i nieadaptacyjnego wielosiatkowego wyższego rzędu, warto wspomnieć o następujących, **opracowanych całkowicie przeze mnie**,



Rysunek 6: Porównanie zbieżności rozwiązania dla dwóch procedur Newtona-Raphsona (góra: bez relaksacji, dół - z dwoma parametrami relaksacji)

- duże ugięcia belki wspornikowej (problem nieliniowy geometrycznie), poddanej działaniu siły skupionej śledzącej (tj., której kierunek podąża za deformacją belki) (rys. 7a),
- estymacja niezawodności, a mianowicie oszacowanie prawdopodobieństwa sytuacji, w której nie występuje uszkodzenie konstrukcji (tutaj: swobodnie podparta belka zginana, poddana działaniu siły skupionej o zmiennej lokalizacji), ze względu na odpowiednie kryterium (rys. 7b),
- stacjonarna i niestacjonarna analiza przepływu ciepła w szynie kolejowej,
- analiza zbiorów rozmytych [R10], w której obciążenia, przyłożone do belki swobodnie podpartej, oraz ich położenia mają przypisane wartości rozmyte (niejednoznaczne).

Ponadto, typowe porównanie czasów obliczeniowych dla techniki wielosiatkowej i podejścia standardowego przedstawiono na rys. 7c (dla nieadaptacyjnych siatek regularnych) i rys. 7d (dla adaptacyjnych nieregularnych chmur węzłów), dla przypadku 1D. W każdym przypadku można zaobserwować znaczną redukcję czasu obliczeń (odpowiednio około 45 i 10 razy).

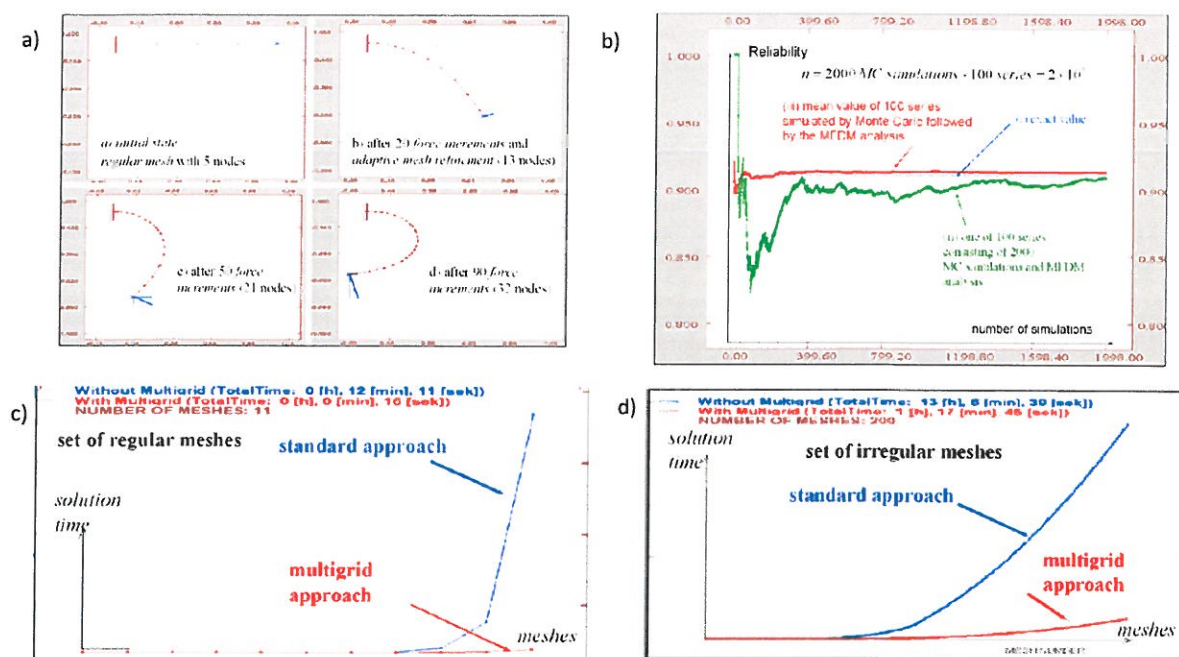
5 Opis pozostałych osiągnięć naukowych

W tym rozdziale omawiane są moje pozostałe osiągnięcia naukowe i badawcze, a mianowicie inne publikacje naukowe, nie ujęte w głównym cyklu, uczestnictwo w projektach naukowych i grantach, a także projekty opracowane we współpracy z przedsiębiorstwami przemysłowymi.

5.1 Pozostałe publikacje naukowe

Poniższe publikacje nie zostały zaliczone do głównego cyklu prac, gdyż albo tylko pośrednio łączą się z opisywaną w nim tematyką [B1,B3,B4,B6] lub też dotyczą zupełnie innych problemów [B2,B5].

B1 Irena Jaworska, Sławomir Milewski, 2016, "On two-scale analysis of heterogeneous materials by means of the meshless finite difference method", *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 14(2):25-43, IF = 0.760, MNiSW = 25 (A), mój wkład = 40%.



Rysunek 7: Różne zastosowania wielosiatkowej BMRS wyższego rzędu: a) duże ugięcia belki wspornikowej, b) oszacowanie niezawodności belki swobodnie podpartej, c) porównanie czasów obliczeń dla nieadaptacyjnej techniki wielosiatkowej z podejściem standardowym, d) porównanie czasu obliczeń dla adaptacyjnej techniki wielosiatkowej z podejściem standardowym

- B2 Sławomir Milewski, Janusz Orkisz, 2013, "Numerical modelling of slumps under highways located on a mining damage area, based on experimental measurements", *Inverse Problems in Science and Engineering* 21(6):987-1006, IF = 0.800, MNiSW = 25 (A), mój wkład = 70%.
- B3 Sławomir Milewski, 2013, "Selected computational aspects of the meshless finite difference method and their implementation in Matlab", *Numerical Algorithms* 63(1):107-126, IF = 1.005, MNiSW = 30 (A), mój wkład = 100%.
- B4 Sławomir Milewski, Irena Jaworska, 2015, "Recent advances in the meshless finite difference method", *Recent advances in civil engineering: computational methods* (monograph chapter). Ed. W.Cecot. Cracow University of Technology Press 481:143-168, IF = 0, MNiSW = 0, mój wkład = 40%.
- B5 Łukasz Bednarski, Sławomir Milewski, Rafał Sieńko, 2014, "Determination of vertical and horizontal soil displacements in automated measuring systems on the basis of angular measurements", *Technical Transactions* 6B:4-13, IF = 0, MNiSW = 14 (B), mój wkład = 50%.
- B6 Janusz Orkisz, Sławomir Milewski, 2008, "A posteriori error estimation based on higher order approximation in the meshless finite difference method", *Lecture Notes in Computational Science and Engineering: Meshfree Methods for Partial Differential Equations III* (monograph chapter) 65:189-213, IF = 0, MNiSW = 0, mój wkład = 80%.

W [B1] przedstawiono zastosowanie BMRS do numerycznego problemu homogenizacji heterogenicznych materiałów o periodycznej strukturze. Badane są dwie skale analizy, a mianowicie makroskala i mikroskala dla inkluzji o kształcie kolistym. Wartości efektywnych stałych materiałowych są określone dla pojedynczego reprezentatywnego elementu objętościowego (RVE). Analizowane są trzy różne typy RVE, wybrane zgodnie z rozkładem inkluzji. Opracowano lokalne i wariacyjne podejścia do rozwiązywania BMRS dla problemu liniowej sprężystości 2D. Omówiono podstawowe kroki algorytmu BMRS.

Podejście BMRS jest stosowane zarówno w skali mikro, jak i makro, w celu określenia pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń, a także efektywnych parametrów materiału. Testy numeryczne obejmują rozwiązanie rozważanych problemów mechanicznych na poziomie mikro i makro. Wyniki dla różnych typów RVE ($1 \div 3$) są porównywane ze sobą pod względem zbieżności rozwiązań. Wyniki potwierdzają poprawność sformułowania problemu i algorytmu obliczeniowego BMRS. Przeprowadzono analizę wyników zbieżności (parametrów materiałowych) dla ciągu siatek z rosnącą liczbą węzłów. Odpowiednie problemy z poziomu makro są rozwiązywane za pomocą metody bezpośredniej *brutalnej siły* (bez homogenizacji) i przy użyciu zestawu efektywnych parametrów materiałowych, uzyskanych z homogenizacji w skali mikro.

W [B2] przedstawiono system pomiarów przemieszczeń gruntu pod autostradą na obszarze szkód górniczych Górnego Śląska. Celem badań jest opracowanie analizy numerycznej takich przemieszczeń występujących pod autostradą, przeprowadzonej niezawodną i szybką metodą przekształcania wyników odpowiednich pomiarów eksperymentalnych w przemieszczenia gruntu pod drogą. Uwzględniono dwa modele numeryczne, a mianowicie uproszczone i pełne podejście. Uproszczone podejście opiera się na technice uśredniania wyników uzyskanych dla pojedynczego ciągu pomiarowego, z dodatkowymi założeniami, dotyczącymi maksymalnej gładkości lub minimalnej krzywizny rozpadliska. Pełne podejście bazuje jednocześnie na wszystkich danych pomiarowych. Do celów inżynierskich, monitorowanie i analizę numeryczną można wykonywać on-line w szybki, wystarczająco dokładny i niezawodny sposób.

W [B3] rozważane są komputerowe techniki implementacji podstawowego algorytmu BMRS. Długoletnia praktyka w MES spowodowała stagnację wielu aspektów BMRS. Głównym celem tego artykułu jest zachęcenie naukowców zajmujących się mechaniką obliczeniową do projektowania własnych kodów bazujących na podejściu różnicowym. Najważniejsze aspekty tego podejścia zostały opisane i wdrożone za pomocą znanego środowiska Matlab. Szczególną uwagę zwrócono na problemy generowania gwiazd różnicowych, lokalnej aproksymacji MWLS, generowanie równań MRS, schematy całkowania, a także końcowe przetwarzanie wyników. Przykładowe kody dotyczą problemu skręcania pręta, przedstawionego zarówno w sformułowaniach mocnych, jak i wariacyjnych (Galerkin). Co więcej, mogą być one łatwo rozszerzone przez użytkowników dla dużej klasy aplikacji mechanicznych i technicznych.

W [B4] przedstawiono wybrane najnowsze osiągnięcia i zastosowania inżynierskie BMRS. Podejście BMRS do analizy numerycznej problemu brzegowego może obejmować generowanie węzłów, modyfikację topologii węzłów, oryginalne koncepcje aproksymacji wyższego rzędu, oszacowanie błędów a-posteriori i wygładzanie rozwiązania, jak również adaptacyjną procedurę wielosiatkową. Ruchome ważone najmniejsze kwadraty są stosowane w celu skonstruowania lokalnej aproksymacji nieznanej funkcji. Różnorodne testy wykonane dla problemów liniowych i nieliniowych wskazują na potencjalną moc udoskonalonego podejścia BMRS (z aproksymacją wyższego rzędu opartą na wyrazach korekcyjnych i podejściu wielopunktowym) w efektywnym rozwiązywaniu (wysokie tempo zbieżności) problemów brzegowych mechaniki, jak również w analizie błędów i adaptacji siatki / chmury węzłów. Całkowita liczba węzłów może zostać zmniejszona, bez pogorszenia jakości rozwiązania MRS, poprawionego przez podniesienie rzędu lokalnej aproksymacji.

W [B5] omówiono techniki analizy danych uzyskanych z łańcuchów pomiarowych zbudowanych z czujników inklinometrycznych. Pozwalają one na poprawę dokładności wyników w przypadku zastosowania klasycznych pomiarów inklinometrycznych, wykonanie pomiarów przemieszczeń gruntu za pomocą łańcuchów pomiarowych, bez ochrony rurowej, rezygnację z używania próbek inklinometrycznych. Dodatkowo umożliwiają budowę automatu układów o znacznie dłuższych elementach pomiarowych i uzyskanie rozsądnych kosztów budowy systemu pomiarowego. Przedstawiono i omówiono dwie metody dopasowania krzywych do danych pomiarowych. Powszechnie stosowana technika uproszczona opiera się na założeniu prostych odcinków między czujnikami pomiarowymi, stanowiących linię łamaną (funkcja spline pierwszego rzędu). Chociaż interpoluje ona wielkości pomiarowe, jego dokładność jest zwykle niska, a największe błędy znajdują się na odcinkach pomiędzy czujnikami. Drugie, bardziej złożone podejście bazuje na matematycznych metodach aproksymacji, takich

jak interpolacja Lagrange'a, funkcje sklepane wyższych rzędów i najbardziej ogólna metoda, technika ruchomych ważonych najmniejszych kwadratów. Przeprowadzone testy numeryczne wyraźnie wykazały, że metody te odtwarzają prawdziwe rozwiązanie (przemieszczenie gruntu) w dużo dokładniejszy sposób, szczególnie w przypadkach, gdy gradienty rozwiązania są wysokie (zbocza lub zwaliska). Co więcej, te rozwiązania mogą być stosowane jako estymatory błędów dla uproszczonego rozwiązania, jeżeli to konieczne.

W [B6] przedstawiono najnowsze osiągnięcia w aproksymacji wyższego rzędu zastosowanej do analizy BMRS problemów brzegowych typu eliptycznego. Koncepcja przybliżenia wyższego rzędu opiera się na uwzględnieniu dodatkowych warunków w rozwinięcia nieznanej funkcji w szereg Taylora. Wyrazy te mogą składać się z pochodnych wyższego rzędu oraz ich skoków i / lub osobliwości. Są one używane jako człony korekcyjne standardowego operatora bezsiatkowego. Wśród wielu zastosowań aproksymacji wyższego rzędu szczególny nacisk położony jest na ocenę a-posteriori błędu rozwiązania i błąd resztkowy, zarówno w formach lokalnych, jak i globalnych. Tak więc podejście wyższego rzędu dostarcza wyniki, które mogą być również stosowane jako rozwiązanie odniesienia wysokiej jakości w globalnych lub lokalnych estymatorach błędów. Różnorodność wykonanych testów 1D i 2D wskazuje na wyraźną wyższość takiego podejścia do szacowania błędów w stosunku do obecnie stosowanych w innych metodach obliczeniowych.

5.2 Udział w projektach badawczych

- C1 "Opracowanie nowego czujnika światłowodowego umożliwiającego wyznaczenie profili pionowych i poziomych przemieszczeń badanych obiektów na odcinkach o długości do 120 km", 2017-2019 (projekt w realizacji), grant Narodowego Centrum Badań i Rozwoju (POIR.01.01.01-00-0550/15), wykonawca.
- C2 "Komputerowa analiza inżynierskich nieustalonych zagadnień termosprężystych i termoplastycznych za pomocą sprzężonej MES / bezsiatkowej MRS" ("Computational coupled FEM / meshless FDM analysis dedicated to engineering nonstationary thermo-elastic and thermo-plastic problems"), 2016-2019, (projekt w realizacji), grant Narodowego Centrum Nauki (2015/19/D/ST8/00816), **kierownik** i wykonawca.
- C3 "Dynamiczne zarządzanie zdolnościami przesyłowymi sieci elektroenergetycznych przy wykorzystaniu innowacyjnych technik pomiarowych" ("Dynamic management of transmission capacity of electric cables using innovative electrical measurement technology"), 2014-2016, grant Narodowego Centrum Badań i Rozwoju oraz Narodowego Funduszu Ochrony Środowiska i Gospodarki Wodnej (NCBR/214108), wykonawca.
- C4 "Rozwijanie i kalibracja modeli numerycznych wybranych istniejących konstrukcji inżynierskich, z wykorzystaniem danych pomiarowych, a także mechanicznych i heurystycznych założeń" ("Development and calibration of numerical models of selected existing engineering structures taking into the account measurement data as well as mechanical and heuristic assumptions"), 2011, Małopolska Agencja Rozwoju Regionalnego (MARR/282/2011/DZPP), wykonawca.
- C5 "Wieloskalowe modelowanie niesprężystych materiałów heterogenicznych za pomocą hp - adaptacyjnej metody elementów skończonych" ("Multiscale modelling of the in-elastic heterogeneous materials by the hp-adaptive finite element method"), 2008-2010, grant przyznany przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego (N N506 369734), wykonawca.

5.3 Współpraca z przemysłem

W ostatnich latach współpracowałem z kilkoma firmami z Małopolski: *Neotrain* (2010-2011) i *SHM System* (2013-2018), które zajmują się problemami należącymi do szerokiej klasy zagadnień SHM (Structural Health Monitoring - Monitorowanie żywotności konstrukcji); *Mathworks* (2012-2013), która jest oficjalnym dystrybutorem oprogramowania Matlab i *JD Engineering* (2018-2020), który jest oficjalnym przedstawicielem pakietu Midas, opracowanego do analizy MES konstrukcji sprężonych.

W ramach współpracy z tymi firmami brałem udział lub biorę udział w trzech dużych projektach, sponsorowanych przez różne polskie agencje i centra, wykorzystujące środki przyznane przez UE. W wyniku mojej współpracy ukazały się cztery prace naukowe ([A2, A3, B2, B5]), a kolejne są w toku lub na etapie planowania.

6 Informacja dotycząca moich obecnych prac

Moje najnowsze prace koncentrują się na następujących aspektach

1. analiza numeryczna problemów termo-elastycznych i termo-plastycznych za pomocą sprzężonego / ulepszanego MES-BMRS (końcowa część projektu badawczego [C1]),
2. analiza numeryczna zagadnień odwrotnych mechaniki, a mianowicie wyznaczanie obciążeń strukturalnych i cieplnych (temperatura brzegowa, strumień cieplny, ciśnienie, siły masowe, źródło ciepła) na podstawie danych pomiarowych (temperatura, odkształcenia, przemieszczenia), za pomocą odpowiednich kombinacji metod probabilistycznych i deterministycznych, w szczególności połączonej bezsiatkowej metody Monte Carlo z algorytmami genetycznymi oraz połączonego bezsiatkowego Monte Carlo z bezpośrednim analitycznym różniczkowaniem funkcji celu, budowanej w formie stochastycznej,
3. optymalizacja trasy kabla ciągną w konstrukcjach mostowych poddanych naprężeniom wstępnym, za pomocą kombinowanego podejścia MES-AG.

7 Pozostała literatura

Poniższa lista obejmuje odnośniki do fundamentalnych prac z obszaru mechaniki obliczeniowej, które były inspiracją do prowadzonych przeze mnie badań naukowych.

- R1 O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, Finite Element Method Its Basis and Fundamentals, Elsevier, 2005.
- R2 J.S. Chen, M. Hillman, S.W. Chi, Meshfree Methods: Progress Made after 20 Years, Journal of Engineering Mechanics 143(4):1-82, 2017.
- R3 L. Demkowicz, W. Rachowicz, P. Devloo, A Fully Automatic hp-adaptivity, Journal of Scientific Computing 17:(1-4):117-142, 2002.
- R4 W. Cecot, M. Oleksy, High order FEM for multigrid homogenization, Computers and Mathematics with Applications 70(7):1391-1400, 2015.
- R5 J. Orkisz, Finite Difference Method (part III), Handbook of Computational Solid Mechanics 336-431, Springer-Verlag, 1998.
- R6 P. Lancaster, K. Salkauskas, Curve and surface fitting, Academic Press Inc, 1990.
- R7 N. Metropolis, S. Ulam, The Monte Carlo Method, Journal of the American Statistical Association, American Statistical Association 44(247):335-341, 1949.
- R8 D. Goldberg, Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Reading, MA: Addison-Wesley Professional, 1989.
- R9 S.N. Atluri, S. Shen, The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, Tech Science Press, 2002.
- R10 B. Moller, M. Beer, Fuzzy Randomness, Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics, Springer - Verlag, 2004.
- R11 T. Belytschko, D. Organ, Y. Krongauz, Coupled finite element/element free Galerkin method, Computational Mechanics 17:186-195, 1995.
- R12 Sun W, Yua YX. Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming, Springer, 2010.

- R13 J. Krok, J. Orkisz, A unified approach to the FE and generalized variational FD methods in nonlinear mechanics, concepts and numerical approach, Discretization Methods in Structural Mechanics 1:353-362, 1990.

Stawomir Krok