

Streszczenie

Schematy adaptacyjne w wielopłatowej wersji analizy izogeometrycznej z zastosowaniami w problemach nieliniowej sprężystości

Rozdział 1

Wprowadzenie

Ogromne zapotrzebowanie na symulacje numeryczne określane często jako “simulation revolution” spowodowało wyłonienie się dyscypliny określanej jako “scientific software development”. Przedmiotem zainteresowania tej dyscypliny jest analiza, projektowanie, implementacja oraz dostarczanie oprogramowania, które będzie uwzględniało specyficzne wymagania prowadzenia badań naukowych oraz fakt, że symulacje numeryczne stały się jednym z filarów nauki na równi z eksperymentami fizycznymi i tworzeniem teorii. Obecnie oprogramowanie pełni kluczową rolę w pracy inżynierskiej oraz badaniach naukowych. Inżynieria lądowa nie jest w tym obszarze wyjątkiem i w dużej mierze jest zależna od technologii cyfrowych, na co dowód można znaleźć w artykułach [53, 52]. Dziedzina inżynierii lądowej ściśle związana jest z oprogramowaniem, które pozwala na projektowanie konstrukcji i jej weryfikację w różnych warunkach obciążenia, nie stosuje się prototypowania jak w innych dziedzinach, co podkreśla znaczenie metod obliczeniowych. Z tego punktu widzenia narzędzia obliczeniowe powinny być dogłębnie przetestowane, a dokumentacja powinna stanowić cenne źródło informacji na temat aspektów implementacji.

Motywacją do podjęcia badań w tej pracy jest odpowiedź na pytanie w jaki sposób przełożyć sformułowania matematyczne metod obliczeniowych na język programowania i struktury danych, tak aby oprogramowanie tworzyło zaawansowane środowisko obliczeniowe, a jednocześnie było łatwe do rozszerzenia i utrzymania.

W kontekście powyższego główne cele pracy zostały sformułowane następująco:

- Zbadanie sformułowań matematycznych opisujących analizę izogeometryczną oraz pokrewne metody obliczeniowe pod kątem możliwości transferu opisu matematycznego na pojęcia projektowe, które stanowią bazę dla stworzenia elastycznego środowiska obliczeniowego.
- Rozpatrzenie konsekwencji jakie niesie za sobą wsparcie dziedziny modelowania

konstrukcji, które uwzględnia zarządzanie nieliniowościami geometrycznymi i fizycznymi w projekcie silnika obliczeniowego.

- Analiza implikacji wynikających z zapewnienia w projekcie silnika obliczeniowego wsparcia dla wielopłatowych modeli geometrycznych. Zaprojektowanie elastycznego algorytmu zszywania płatów w oparciu o metodę Nitsche oraz wprowadzenie możliwości wyboru metody łączenia płatów.
- Projekt silnika obliczeniowego uwzględniający zastosowanie różnych przestrzeni aproksymacji oraz możliwości zagęszczania siatki, które mogą być wykorzystywane w zagadnieniach liniowej i nieliniowej sprężystości.
- Implementacja kompletnego i gotowego do pracy pakietu obliczeniowego oraz weryfikacja zbioru przykładów testowych. Przykłady testowe powinny być wybrane z zakresu zagadnień związanych z mechaniką konstrukcji oraz poddziedzinami inżynierii lądowej. Przykłady powinny uwzględniać modelowanie jedno- i wielopolowe, zarówno w zakresie liniowym jak i nieliniowym, a opis geometrii powinien eksponować zalety oferowane przez analizę izogeometryczną.
- Weryfikacja określonej grupy narzędzi inżynierskich i identyfikowanie ograniczeń wpływających na proces implementacji pakietu numerycznego.

W pracy przedstawione zostało zastosowanie analizy izogeometrycznej w problemach liniowej i nieliniowej sprężystości. Główna uwaga poświęcona jest schematom adaptacyjnym rozumianym nie tylko jako dostosowanie gęstości stopni swobody w celu poprawy otrzymanego rozwiązania, ale w szerszym kontekście tj. swobody w dostosowaniu metody numerycznej do rozwiązywanego problemu w ramach jednego pakietu oprogramowania naukowego. Problem ten jest w centrum zainteresowania wielu ośrodków badawczych i przemysłowych. Schematy adaptacyjne zastosowane zostały w zadaniach uwzględniających nieliniowości geometryczne i materiałowe. Modele obliczeniowe budowane w oparciu o nieliniową kinematykę wykorzystywały opis hipersprężystych modeli konstytutywnych. Przygotowane opisy, algorytmy i struktury danych miały na celu budowę środowiska obliczeniowego wspierającego prace badawcze z zakresu zastosowań analizy izogeometrycznej.

W czasie rozpoczęcia prac badawczych dostępne oprogramowanie wspierające IGA było na wstępnym etapie rozwoju. Należało dokonać wyboru między zaangażowaniem prac w istniejące oprogramowanie i tym samym rozeznawanie koncepcji już wprowadzonych lub rozpoczęciem niezależnej implementacji. Wybrane zostało drugie podejście ze względu na fakt, iż dawało niezależność, a jednocześnie większą kontrolę nad procesem wprowadzania nowych sformułowań metod izogeometrycznych.

Rozdział 2

Analiza izogeometryczna

Rozdział poświęcony jest wprowadzeniu do analizy izogeometrycznej (IGA). Idea metody została zaprezentowana przez Hughesa i współpracowników w roku 2005 w publikacji [68]. W rozdziale zamieszczono krótki rys historyczny rozwoju IGA wraz z wyszczególnieniem najważniejszych źródeł.

Głównym celem IGA jest połączenie modelowania geometrycznego za pomocą NURBS oraz metody elementów skończonych. Analiza izogeometryczna szybko zyskała popularność i znalazła wiele zastosowań w problemach inżynierskich. Analiza izogeometryczna w swojej podstawowej wersji wykorzystuje koncepcję elementu izoparametrycznego tj. funkcje bazowe używane do aproksymacji geometrii są stosowane do aproksymacji nieznanego pola. W rozdziale omówione zostały podstawowe funkcje stosowane w aproksymacji IGA tj. funkcje B-Spline i NURBS. Przedstawione zostały główne pojęcia jak geometrie jedno- i wielopłatowe, schematy zagęszczania siatki oraz zaawansowane przestrzenie aproksymacji ułatwiające lokalne zagęszczanie siatki. Oprócz przedstawienia kontekstu historycznego IGA, celem rozdziału jest wprowadzenie podstawowej bazy pojęciowej i notacji.

Rozdział 3

Rozwój oprogramowania obliczeniowego opartego o analizę izogeometryczną

Rozdział 3 poświęcony zawiera omówienie zagadnienia projektowania i rozwoju oprogramowania naukowego. W rozdziale przedstawiono najważniejsze dostępne oprogramowanie wykorzystujące analizę izogeometryczną. Przedstawiona została idea systemu AHIGA - pakietu obliczeniowego opartego o adaptacyjne i hybrydowe podejście do analizy izogeometrycznej. Adaptacja związana jest z możliwością dostosowywania oprogramowania do zadań obliczeniowych. Podejście hybrydowe polega na zastosowaniu różnych wariantów metod obliczeniowych.

Szczególny nacisk położono na kwestię analizy oraz projektowania, gdyż od tych etapów zależało osiągnięcie celu – to jest stworzenie elastycznego pakietu obliczeniowego. Oryginalne rezultaty opisane w tym rozdziale zawierają wyróżnienie grup funkcjonalności, w ramach których wprowadzane są różne warianty oraz przedstawione jest jak na te grupy funkcjonalności nakładają się główne rodziny klas obiektów. Przedstawiono również uwagi dotyczące zagadnień takich jak wybór języka programowania, wybór bibliotek zarządzanie kodem źródłowym i ogólnie projektami (repozytoria), tworzenie dokumentacji, testowanie (ang. continuous testing).

Rozdział 4

Wielopolowa analiza dla wielopłatowych modeli geometrycznych

W Rozdziale 4 została rozszerzona dyskusja przedstawiona w Rozdziale 2 poprzez omówienie powszechnych problemów spotykanych przy zastosowaniu modeli wielopłatowych. Aby ułatwić zrozumienie problemu dyskusja rozpoczyna się od zagadnienia liniowej sprężystości analizowanego w obszarze geometrycznym składającym się z jednego płata. Przedstawione są kluczowe koncepcje znane z metody elementów skończonych w odniesieniu do analizy izogeometrycznej: wprowadzenie przestrzeni aproksymacji, całkowanie po elementach, agregacja macierzy i uwzględnianie warunków brze-

wych. Ze względu na różnicę w interpretacji stopni swobody – w IGA wykorzystywane są matematyczne stopnie swobody – w rozdziale szczegółowo omówiony jest schemat wprowadzania kinematycznych niejednorodnych warunków brzegowych. Uwzględniając główne założenia przygotowywanego oprogramowania AHIGA, w rozdziale dokładnie przeanalizowana jest kwestia restrykcji pól, to jest konstrukcji funkcji będących restrykcją wyjściowej funkcji do podobszarów jej dziedziny. Podrozdział zakończony jest prezentacją testu numerycznego weryfikującego poprawność implementacji dla geometrii jednopłatowych.

Istotę rozdziału stanowi omówienie przejścia z modelowania geometrii jednopłatowych do geometrii wielopłatowych. Przejście takie nie jest trywialne i generuje wiele problemów, które nie są widoczne przy zastosowaniu modeli jednopłatowych. Dodatkową komplikację stanowi fakt, że na poziomie notacji matematycznej problemy te są często ukryte za symbolami operacji matematycznych, na przykład operacji części wspólnej obszaru. Dopiero próba implementacji takich abstrakcyjnych operacji pokazuje skalę trudności. Możemy wyróżnić trzy poziomy skomplikowania opisu problemu: poziom geometryczny, poziom sformułowania i poziom algebraiczny. Należy odpowiedzieć na pytania jak przechowywać wielopłatową geometrię, w jaki sposób zapewnić ciągłość aproksymacji pola poszukiwanej wielkości i jak uwzględnić zmiany na poziomie równań algebraicznych? W tej części zostały zaprezentowane odpowiedzi na powyższe pytania. Zaprezentowana została autorska struktura danych *Metamesh*, która umożliwia zarządzanie wielopłatowymi modelami geometrycznymi. Omówione zostały możliwości łączenia płatów na poziomie sformułowania matematycznego przez zastosowanie statycznej kondensacji oraz metody Nitsche, porównaj prace [97, 95]. Metoda Nitsche jest kluczowym elementem przygotowanego oprogramowania, dlatego w rozdziale szczególna uwaga poświęcona została nie tylko przedstawieniu koncepcji matematycznej, ale również przełożenia tej idei na szczegóły implementacji: struktury danych i schematy algorytmiczne. Przedstawione rozwiązania projektowe wspierają zarządzanie modelem równań algebraicznych. Podrozdział zakończony jest testem numerycznym prezentującym zagadnienie zginanej belki modelowanej za pomocą geometrii wielopłatowych.

Ostatnią część rozdziału stanowi rozszerzenie analizy geometrii wielopłatowych o analizę wielopolową na przykładzie wprowadzenia nieściśliwości w zagadnieniu liniowej sprężystości. Ideą podrozdziału jest przedstawienie struktur danych, które bezpośrednio związane są ze sformułowaniem matematycznym. Głównym zadaniem omówionych struktur danych jest wprowadzenie języka opisu sformułowania, który ułatwia implementację problemu. Weryfikacja implementacji zadania wielopolowego jest przeprowadzona za pomocą analizy typowego problemu membrany Cooke’a.

Rozdział 5

Schematy adaptacyjne

W Rozdziale 5 omówione zostały schematy adaptacyjne zastosowane w oprogramowaniu AHIGA. Termin adaptacja, który najczęściej rozumiany jest jako dostosowywanie gęstości aproksymacji (tj. liczby stopni swobody przypadającej na dany fragment obszaru obliczeniowego) w celu poprawy uzyskanego rozwiązania, w pracy używany jest w szerszym kontekście – nie tylko jako dobór gęstości aproksymacji, ale również dobór

Ostatnia część rozdziału poświęcona została możliwościom rozszerzania przygotowanego pakietu obliczeniowego AHIGA o nowe metody obliczeniowe. Pierwszą omówioną metodą jest metoda Discontinuous Galerkin Finite Difference (DGFD), porównaj pracę [70], która według wiedzy autorki, nie była dotąd stosowana w kontekście analizy izogeometrycznej i możliwości zszywania płatów. Drugą metodą jest Finite Cell Method, porównaj pracę [50, 108], która umożliwia rozszerzenie narzędzia o analizę geometrii typu *trimmed*. Tego typu podejścia są szczególnie atrakcyjne w zagadnieniach komputerowej dynamiki płynów (CFD), a opracowane rozszerzenia pakietu AHIGA otwierają drogę do jego stosowania na przykład w zagadnieniach analizy interakcji konstrukcja - płyn (fluid structure interactions). Zaprezentowano opis matematyczny obu metod, przedyskutowano koncepcję wprowadzenia metod do zaprojektowanego narzędzia obliczeniowego oraz zwryfikowano implementację odpowiednimi testami numerycznymi.

Rozdział 6 został poświęcony jest analizie nieliniowej. Wprowadzenie zawiera przegląd literatury obejmujący zastosowania sformułowań matematycznych dla materiałów hipersprężystych w kontekście analizy izogeometrycznej oraz odniesień do prac dotyczących przestrzeni aproksymacyjnych elementów mieszanych.

Opis sformułowań matematycznych używanych w zagadnieniach nieliniowych poprzedzony jest krótkim przedstawieniem podstawowych miar deformacji oraz szczegółów implementacji w zakresie modyfikacji oprogramowania w celu zapewnienia wsparcia dla analizy nieliniowej. W rozdziale przedstawione jest sformułowanie przemieszczeniowe oraz zagadnienie zszywania płyt w kontekście procesu nieliniowego. Łączenie płyt realizowane jest za pomocą metody Nitsche, dlatego krótko omówione szczegóły implementacji nawiązują do rozwiązań przedstawionych w rozdziałach poprzednich. Sformułowanie przemieszczeniowe zawodzi w przypadku, gdy materiał hipersprężysty jest materiałem nieściśliwym lub prawie nieściśliwym. Z różnych możliwości rozwiązania tego problemu, w pracy wybrane zostało podejście oparte na sformułowaniu mieszanym, gdzie aproksymowane są dwa pola: pole przemieszczeń i pole ciśnienia. Dzięki zapewnieniu wsparcia analizy wielopolowej, omawianego w Rozdziale 4, implementacja sformułowania dwupolowego sprowadza się do zapisania odpowiednich wyrażeń podcałkowych. Na podstawie analizy sformułowań teoretycznych, pakiet AHIGA zaprojektowano tak, by była w nim możliwość uwzględniania zarówno nieliniowości geometrycznych jak i materiałowych.

W rozdziale istotną część stanowi dyskusja na temat wprowadzenia różnych przestrzeni aproksymacyjnych, które mogą być z powodzeniem wykorzystywane w sformułowaniach mieszanych. Omówiona jest konstrukcja takich przestrzeni oraz przedstawiony jest warunek inf-sup, który musi być spełniony, aby element był uznawany za stabilny i mógł być zastosowany w zadaniu obliczeniowym. Podkreślone są zalety oprogramowania AHIGA, które dzięki modułowemu projektowi oraz licznym funkcjom pomocniczym, umożliwia bezproblemowe wprowadzenie nowych przestrzeni aproksymacji.

Osadzenie w pakiecie obliczeniowym solvera nieliniowego jest zadaniem wymagającym starannego projektu, zwłaszcza jeżeli założeniem jest otrzymanie oprogramowania łatwego w utrzymaniu i rozbudowie. Rozdział zakończony jest testem numerycznym weryfikującym poprawność implementacji solvera nieliniowego.

Rozdział 7

Wybrane przykłady zastosowania pakietu obliczeniowego AHIGA w problemach liniowej i nieliniowej sprężystości

W Rozdziale 7 przedstawione zostało zastosowanie przygotowanego narzędzia w problemach obliczeniowych mechaniki. Rozbudowane przykłady obliczeniowe prezentują szerokie możliwości zaprojektowanego pakietu obliczeniowego, który z powodzeniem może być wykorzystany w analizie problemów liniowej i nieliniowej sprężystości.

Pierwsza grupa przykładów skupiona jest na analizie płyt 3D (płyty ortotropowe, płyty z materiałem z gradacją, płyty z rdzeniem falistym). W przykładach kluczowe jest zastosowanie metody Nitsche do wymuszenia ciągłości na granicach warstw oraz zastosowanie metody GIFT pozwalającej na zastosowanie bazy wielomianów Chebysheva do aproksymacji pola przemieszczeń przy jednoczesnym zachowaniu dokładnej geometrii modelowanej z użyciem NURBS. Uzyskane wyniki dla płyt trójwarstwowych porównane są z wynikami dostępnymi w publikacjach naukowych. Na podstawie uzyskanych

rozwiązań można stwierdzić, że aproksymacja przemieszczeń funkcjami B-Spline drugiego stopnia może nie dawać zadowalających rezultatów, zwłaszcza przy zastosowaniu rzadszych siatek. Warto rozważyć jest zastosowanie innych funkcji bazowych np. wielomianów Chebysheva, które dają porównywalne rezultaty dla mniejszej liczby stopni swobody. Przygotowane oprogramowanie spełnia założone cele projektowe – jest środowiskiem, które wspiera możliwości weryfikacji schematów aproksymacji w zakresie analizy liniowej.

Kolejny podrozdział ukazuje analizę nieliniową opartą na sformułowaniu przemieszczeniowym, w tym zastosowanie metody Nitsche oraz metody GIFT. Pierwszy przykład związany jest z analizą tarczy z otworami poddanej rozciąganiu. W przykładzie nieliniowość wynika z zastosowania materiału hipersprężystego opisanego modelem Neo-Hooke. Dodatkowo, założona jest nieściśliwość, która wymuszona jest przez związanie składowej C_{33} prawego tensora Cauchy’ego-Greena z pozostałymi składowymi tensora. Zadanie obliczone zostało stosując schemat metody Newtona-Raphsona z równą liczbą przyrostów oraz sterowaniem przemieszczeniowym. Nowością w przeprowadzonej analizie jest zastosowanie innych niż NURBS funkcji bazowych. Otrzymane rezultaty wykazały poprawność sformułowanego zadania – otrzymane pole przemieszczeń jest ciągłe na granicach między płatkami. Wyniki dla aproksymacji funkcjami B-Spline oraz funkcjami Chebysheva są zgodne w kolejnych przyrostach obliczeniowych, co pozwala stwierdzić, że przygotowane oprogramowanie pozwala na analizę różnych schematów aproksymacji zachowując dokładną geometrię modelu. Drugi przykład związany jest z analizą obszaru trójwymiarowego oraz zastosowaniem adaptacyjnego zagęszczania siatki. Przeanalizowane są różne możliwości adaptacyjnego zagęszczania siatki. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, iż istotną rolę pełni początkowy dobór siatki obliczeniowej oraz wybór procesu zagęszczania siatki.

Ostatnia część rozdziału poświęcona jest analizie nieliniowej opartej na sformułowaniu mieszanym. Wykorzystując przygotowany pakiet obliczeniowy AHIGA, przetestowane zostały elementy z różnych przestrzeni aproksymacyjnych tj. elementy z przestrzeni Taylor-Hood, Raviart-Thomas, Nédélec i Sub-grid. Analiza ta w kontekście nieliniowym jest nowością, dotychczas elementy te były sprawdzane w zakresie sformułowań liniowych, porównaj prace [28, 65]. W zakresie nieliniowości Kadapa [74] sprawdził zastosowanie elementów Sub-grid, natomiast Liu [86] elementów z przestrzeni Taylor-Hood w zadaniu elastodynamiki. Przykłady prezentowane w tej części są zadaniami testowymi opisywanymi w literaturze [101, 102]. Analiza składa się z dwóch etapów: sprawdzenia warunku inf-sup oraz sprawdzenia zbieżności rozwiązania dla kolejnych stopni zagęszczenia siatki. Wykonane testy wykazały możliwość zastosowania wszystkich rodzajów proponowanych elementów w kontekście sformułowania mieszanego analizy nieliniowej. Na podstawie uzyskanych wyników można wysnuć wniosek, że elementy z przestrzeni Nédélec oraz elementy Sub-grid najlepiej sprawdzają się w analizie, jednak elementy z przestrzeni Nédélec mogą być łatwiejsze w implementacji komputerowej, jako że ta sama siatka obliczeniowa jest użyta do aproksymacji przemieszczenia oraz ciśnienia. Testy wykazały, że niski stopień aproksymacji nie wpływa znacząco na wyniki obliczeń. Zaprojektowane narzędzie AHIGA spełniło swoją rolę jako środowisko obliczeniowe wspierające zastosowanie podejścia adaptacyjnego w testowaniu metod numerycznych w kontekście analizy nieliniowej.

Rozdział 8

Wnioski

W niniejszej pracy przedstawiono kompletny projekt narzędzia obliczeniowego opartego o analizę izogeometryczną. Motywem przewodnim pracy było zbadanie koncepcji IGA oraz sformułowanie odwzorowania ich na szczegóły implementacji. Wszystkie wyszczególnione cele w Rozdziale 1 zostały osiągnięte. W pierwszych rozdziałach szczegółowo zaprezentowano identyfikację kluczowych elementów projektu dla analizy izogeometrycznej, określono konsekwencje wprowadzenia modelu nieliniowego, zbadano możliwości zszywania płatów oraz omówiono projekt silnika obliczeniowego wspierającego zastosowanie różnych przestrzeni aproksymacyjnych. Przygotowane oprogramowanie zostało zastosowane do analizy problemów w zakresie liniowej i nieliniowej sprężystości.

Oryginalnymi elementami pracy są:

- autorski projekt pakietu obliczeniowego,
- algorytmy oraz matematyczny opis struktur danych wspierających modele wielopłatowe,
- zastosowanie metody Nitsche oraz metody GIFT w przykładach analizy płyt warstwowych,
- zastosowanie metody GIFT w analizie nieliniowej w celu porównania różnych schematów aproksymacji,
- zbadanie możliwości zastosowania elementów z różnych przestrzeni aproksymacji w analizie nieliniowej w oparciu o sformułowanie dwupolowe.

Przygotowane oprogramowanie oraz wnioski wyciągnięte z analizowanych przykładów pozwalają na określenie następujących kierunków badań: wprowadzenie modeli plastycznych oraz mechaniki kontaktu, analiza konstrukcji inżynierskich jak łożyska mostowe, płyty kompozytowe czy konstrukcje żelbetowe, wprowadzenie hierarchicznych funkcji kształtu oraz rozwinięcie w oprogramowaniu wstępnej implementacji metody FCM.