

**dr Irena JAWORSKA**

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki

Wydział Inżynierii Lądowej

Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej

ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

**AUTOREFERAT**  
**(w języku polskim)**

Kraków, marzec 2019

## SPIS TREŚCI

1. IMIĘ I NAZWISKO .....	2
2. POSIADANE DYPLOMY, STOPNIE NAUKOWE .....	2
3. INFORMACJE O DOTYCHCZASOWYM ZATRUDNIENIU .....	2
4. WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA .....	3
4.1 Tytuł osiągnięcia .....	3
4.2 Cykl publikacji .....	3
4.3 Statystyka cyklu publikacji .....	4
4.4 Omówienie badań będących tematem cyklu publikacji .....	6
4.4.1 Wprowadzenie .....	6
4.4.2 Narzędzie badań .....	7
4.4.3 Dwuskalowa analiza materiałów niejednorodnych .....	11
4.4.4 Analiza zagadnień nieliniowych .....	17
4.4.5 Podsumowanie .....	22
4.4.6 Związek moich badań z dyscypliną budownictwo .....	23
4.5 Cykl publikacji z omówieniem i wyszczególnieniem elementów oryginalnych .....	24
5. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO – BADAWCZYCH .....	28
5.1 Pozostały dorobek naukowy po doktoracie .....	28
5.1.1 Publikacje .....	29
5.1.2 Referaty na konferencjach międzynarodowych .....	30
5.1.3 Referaty na konferencjach krajowych .....	31
5.2 Udział w projektach .....	31
5.2.1 Projekty naukowe .....	31
5.2.2 Projekty-współpraca z przemysłem i innymi podmiotami zewnętrznymi .....	32
5.2.3 Inne projekty .....	32
5.3 Staże zagraniczne .....	32
5.4 Recenzowanie publikacji naukowych .....	33
5.5 Członkostwo w organizacjach naukowych .....	33
5.6 Osiągnięcia dydaktyczne i organizacyjne .....	33
5.6.1 Osiągnięcia dydaktyczne .....	34
5.6.2 Działalność organizacyjna .....	34
5.7 Szkolenia i certyfikaty .....	34
5.8 Nagrody i odznaczenia .....	34

## 1. IMIĘ I NAZWISKO

**Irena Jaworska**

## 2. POSIADANE DYPLOMY, STOPNIE NAUKOWE

### Stopień doktora (z wyróżnieniem):

Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, maj 2009

Dziedzina nauk technicznych, dyscyplina – mechanika

Tytuł rozprawy: „Uogólnienia wielopunktowej metody różnic skończonych dla zagadnień brzegowych mechaniki”

Promotor: prof. dr hab. inż. Janusz Orkisz

Recenzenci: dr hab. inż. Wojciech Karmowski, prof. PK

dr hab. inż. Zdzisław Więckowski, prof. PŁ

### Tytuł magistra:

Lwowski Uniwersytet Narodowy im. Iwana Franki, Wydział Matematyki Stosowanej i Mechaniki (od 09.1990 - Matematyki Stosowanej i Informatyki), czerwiec 1990

Tytuł pracy magisterskiej: „Regularyzacja równań całkowych pierwszego rodzaju ze słabą osobliwością jądra”

## 3. INFORMACJE O DOTYCHCZASOWYM ZATRUDNIENIU

2009 – obecnie

**adiunkt naukowo-dydaktyczny**, Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej

2000 – 2009

**asystent naukowo-dydaktyczny**, Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej

1990 – 2001

**inżynier-programista**, Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki im. Pidstryhacza Akademii Nauk Ukrainy, Lwów

## 4. WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA

### 4.1 Tytuł osiągnięcia

Osiągnięciem naukowym, stanowiącym podstawę starania się o wszczęcie postępowania habilitacyjnego, wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2017 r. poz. 1789), jest powstały po otrzymaniu stopnia doktora (w latach 2012-2019) cykl publikacji powiązanych tematycznie pod zbiorczym tytułem:

#### **Wielopunktowa bezsiatkowa MRS wyższego rzędu dla zagadnień nieliniowych i niejednorodnych materiałów**

W skład cyklu publikacji wchodzi dziewięć prac, oznaczonych odpowiednio [A1-A9], przedstawionych w rozdziale 4.2 i uporządkowanych według rodzaju publikacji w kolejności chronologicznej zaczynając od najnowszych. Przy poszczególnych pozycjach podany jest wskaźnik IF (Impact Factor) czasopisma wg roku opublikowania oraz punkty MNiSW. W przypadku prac opublikowanych w 2019 roku, wartości te zostały podane za rok 2018.

### 4.2 Cykl publikacji

#### Artykuły w czasopismach JCR

[A1]	<b>Jaworska I.</b> , Higher Order Multipoint Meshless FDM for Two-scale Analysis of Heterogeneous Materials, <i>Int. J. Multiscale Comput. Eng.</i> , DOI:10.1615/IntJMultCompEng.2019028866, 2019.  <i>udział własny – 100%</i>	<b>IF 1.016</b> lista A MNiSW  <b>25</b>
[A2]	<b>Jaworska I.</b> , Orkisz J., On Nonlinear Analysis by the Multipoint Meshless FDM, <i>Engineering Analysis with Boundary Elements</i> , vol.92, 231-243, 2018.  <i>udział własny – 90%</i>	<b>IF 2.138</b> lista A MNiSW  <b>35</b>
[A3]	<b>Jaworska I.</b> , On some aspects of the Meshless FDM application for the heterogeneous materials, <i>International Journal for Multiscale Computational Engineering</i> , 15(4): 359–378, 2017.  <i>udział własny – 100%</i>	<b>IF 1.016</b> lista A MNiSW  <b>25</b>
[A4]	<b>Jaworska I.</b> , Milewski S., On two-scale analysis of heterogeneous materials by means of the meshless finite difference method, <i>International Journal for Multiscale Computational Engineering</i> , 14(2): 113-134, 2016.  <i>udział własny – 60%</i>	<b>IF 1.095</b> lista A MNiSW  <b>25</b>
[A5]	<b>Jaworska I.</b> , Orkisz J., Higher order multipoint method – from Collatz to meshless FDM, <i>Engineering Analysis with Boundary Elements</i> , 50: 341–351, 2015.  <i>udział własny – 90%</i>	<b>IF 1.862</b> lista A MNiSW  <b>30</b>

[A6]	<b>Jaworska I.</b> , On the ill-conditioning in the new higher order multipoint method, <i>Computers &amp; Mathematics with Applications</i> , 66(3): 238-249, 2013.  <i>udział własny – 100%</i>	<b>IF 1.996</b> lista A MNiSW  <b>35</b>
------	---	--

### Publikacje w bazach Web of Science i Scopus

[A7]	<b>Jaworska I.</b> , Application of the Multipoint Meshless FDM to Chosen Demanding Problems, AIP Conference Proceedings, 2078, 020071, 2019.  <i>udział własny – 100%</i>	<b>WoS<sup>1</sup>, Scopus</b> punktacja MNiSW  <b>15</b>
[A8]	<b>Jaworska I.</b> , On application of the meshless finite difference method to numerical homogenization, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Eds.: M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, G. Stefanou, V. Plevris, Crete Island, Greece, 2417-2425, vol.2, 2016.  <i>udział własny – 100%</i>	<b>WoS, Scopus</b> punktacja MNiSW  <b>15</b>
[A9]	<b>Jaworska I.</b> , Orkisz J. On the multipoint meshless FD method using the local Petrov-Galerkin approach, CD-ROM Proceedings of the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Eds.: Eberhardsteiner, J.; Böhm, H.J.; Rammerstorfer, F.G., Publisher: Vienna, 6582–6591, 2012.  <i>udział własny – 90%</i>	<b>Scopus</b> punktacja MNiSW  <b>15</b>

### 4.3 Statystyka cyklu publikacji

Statystyka artykułów wymienionych w poprzednim rozdziale, przedstawiona w Tablicy 1, wygląda następująco.

Sześć z przytoczonych artykułów zostało opublikowane w punktowanych czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (JCR), wchodzących do listy A Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego (MNiSW). Pozostałe trzy są indeksowane w bazach Scopus i Web of Science (WoS).

Cykl publikacji obejmuje badania prowadzone nad nowopowstałą metodą rozwijaną przeze mnie. Z tego powodu widać tutaj zdecydowanie przeważający wkład własny – 92% (średnia arytmetyczna). Jestem jedynym autorem pięciu prac, w tym trzech artykułów w czasopismach JCR. W trzech pracach współautorskich uwzględniono doradczy udział Promotora mojej pracy doktorskiej – prof. J. Orkisz, który występował głównie jako konsultant, oraz jeden artykuł powstał we współautorstwie z dr. S. Milewskim (mój udział – 60%).

Sumaryczny impact factor (IF) przedstawionych w punkcie 4.2 artykułów wynosi 9.123 oraz posiada łączną liczbę punktów MNiSW 220. Natomiast dla wszystkich prac po doktoracie: IF = 9.533, punkty MNiSW=265.

<sup>1</sup> Opublikowano 4 marca 2019, w trakcie indeksowania

Ponieważ tematyka moich badań jest nowa, leży w zakresie alternatywnych do popularnej MES metod bezsiatkowych, które, z kolei, są bardzo różnorodne i bazują na rozmaitych podejściach aproksymacyjnych, – to jest ona przedmiotem zainteresowań dość wąskiej grupy naukowców, co przekłada się na niezbyt wielką na dzień dzisiejszy liczbę cytowań. Liczba cytowań moich prac (bez uwzględnienia dwóch prac opublikowanych w 2019 roku) wynosi 33 (7 – bez autocytowań) w bazie Scopus i odpowiednio 23 (4) w bazie Web of Science. Indeks Hirsha (h-indeks) wynosi 4 (Scopus) i 3 (WoS).

Metoda, którą rozwijam, jest wąsko specjalizowaną metodą, rozszerzeniem Bezsiatkowej MRS (BMRS), jednej z najstarszych klasycznych metod bezsiatkowych, do której odwołuje się wiele naukowców z zakresu metod bezsiatkowych. Powstała ona w krakowskim ośrodku, rozwijana przez lata przez prof. J. Orkiszę i zespół jego współpracowników jak T. Liszka, W. Tworzydło, J. Krok, M. Pazdanowski, J. Magiera, I. Jaworska, S. Milewski. W ostatnich latach metoda została rozszerzona na dwie modyfikacje wyższego rzędu – metodę wielopunktową (Multipoint, rozwijaną przeze mnie) oraz metodę z wykorzystaniem tzw. wyrazów korekcyjnych (S. Milewski).

W celu popularyzacji metody, ze swojej strony dokładałam starań, aby wyniki moich badań były publikowane w renomowanych czasopismach z listy JCR oraz przedstawiane na odpowiednich sesjach światowych i europejskich kongresów naukowych.

Rodzaj publikacji	Liczba	Wkład własny (średnia arytm.)	Punkty MNiSW	Sumaryczny IF
<b>Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego (część 1)</b>				
Lista A MNiSW	6	90%	175	9.123
Indeksowane WoS i Scopus	3	97%	45	–
<b>Razem (część 1)</b>	<b>9</b>	<b>92%</b>	<b>220</b>	<b>9.123</b>
<b>Pozostały dorobek naukowy po doktoracie (część 2)</b>				
Lista A MNiSW	1	90%	15	0.41
Indeksowane WoS i Scopus	2	95%	30	–
Rozdział w monografii	1	60%	–	–
Recenzowane publ. konf.	4	80%	–	–
Referaty na konferencjach międzynarodowych	14	–	–	–
Referaty na konfer. kraj.	3	–	–	–
<b>Razem (część 2)</b>	<b>25</b>		<b>45</b>	<b>0.41</b>
<b>Razem</b>	<b>34</b>		<b>265</b>	<b>9.533</b>

**Indeks Hirsha:** 4 (Scopus), 3 (WoS) – nie uwzględniający publikacji [A1] i [A7]

**Tablica 1.** Zestawienie oceny punktowej publikacji po doktoracie



## 4.4 Omówienie badań będących tematem cyklu publikacji

### 4.4.1 Wprowadzenie

Przedmiotem badań, będących tematem cyklu publikacji, jest analiza zagadnień nieliniowych oraz materiałów niejednorodnych dokonana za pomocą nowej wielopunktowej bezsiatkowej metody różnic skończonych wyższego rzędu.

Opis omawianego osiągnięcia jest zorganizowany w następujący sposób.

**Kontynuację moich badań nad nową wielopunktową BMRS opisałam w części 4.4.2 – „Narzędzie badań”.** Podstawy rozpatrywanej metody opracowałam w pracy doktorskiej i następnie rozwinęłam w artykułach [A5], [A6] i [A9] pod kątem uniknięcia złego uwarunkowania oraz zbadania i poprawy efektywności, wynikającej z cech metody i zastosowania sformułowania lokalno-globalnego. Dotyczy to przede wszystkim nowych oryginalnych elementów takich jak:

- opracowanie uogólnionego opisu metody wielopunktowej;
- kompleksowe opracowanie, przetestowanie algorytmu i przeanalizowanie wyników łączenia metody wielopunktowej z sformułowaniem lokalno-globalnym Petrova-Galerkina MLPG5;
- opracowanie nowej wersji z regularyzacją podejścia ogólnego metody wielopunktowej;
- zbadanie, przeanalizowanie i porównanie różnych wersji podejścia ogólnego, opracowanych w celu uniknięcia osłabienia, pod kątem efektywności zastosowania;
- wykrycie, zbadanie i przetestowanie cech charakterystycznych metody oraz porównanie z klasyczną BMRS i MES – zbieżność pochodnych, efektywność metody.

Następna część opracowania **4.4.3 dotyczy rozwinięcia metody dla zagadnień homogenizacji numerycznej materiałów niejednorodnych** (problematyka obecnie intensywnie rozwijana na świecie), między innymi następujących oryginalnych elementów ([A1], [A4], [A6], [A8]):

- opracowanie sformułowania i algorytmu zastosowania bezsiatkowej MRS w zagadnieniu homogenizacji numerycznej materiałów niejednorodnych;
- opracowanie modelu numerycznego i schematu zastosowania wielopunktowej BMRS w zagadnieniu homogenizacji;
- szczegółowa analiza cech charakterystycznych metody wielopunktowej i BMRS w zastosowaniu do homogenizacji numerycznej: m.in. występowanie oscylacji i zaproponowanie sposobu jej uniknięcia; analityczne potwierdzenie spełnienia warunków ciągłości na granicy materiałów w skali mikro dla różnych sformułowań; weryfikacja wyników homogenizacji materiałów anizotropowych.

**W części 4.4.4 opisuję rozwinięcie metody wielopunktowej do zastosowań w analizie nieliniowej** (zarówno geometrycznie, jak i fizycznie), zawarte w publikacjach [A2] i [A9], m.in. z elementami oryginalnymi:

- sformułowanie, opracowanie modelu numerycznego i algorytmu zastosowania wielopunktowej BMRS do zagadnień nieliniowych zarówno geometrycznie, jak i fizycznie;
- analiza koncepcji obliczeń pochodnych stosowanych w podejściu wielopunktowym poprzez składanie;

- opracowanie przyrostowo-iteracyjnego modelu numerycznego oraz koncepcji „staggered scheme” z zastosowaniem metody wielopunktowej do zagadnień nieliniowych.

W części 4.4.5 dokonałam podsumowania wykonanych badań pod kątem zalet i wad (również w porównaniu z innymi metodami) metody rozwijanej przeze mnie do zastosowań w analizie nieliniowej i homogenizacji numerycznej. Możliwości wykorzystania badań do szerokiej klasy zadań mechaniki związanej z budownictwem naszkicowałam w części 4.4.6 – „Związek moich badań z dyscypliną budownictwo”.

#### 4.4.2 Narzędzie badań

Podstawy nowej wielopunktowej BMRS (Multipoint Meshless FDM) zostały opracowane w mojej pracy doktorskiej i następnie rozwinięte przeze mnie w kolejnych publikacjach omawianego cyklu pod kątem bardziej wymagających typów zagadnień inżynierskich z zakresu budownictwa i mechaniki.

Idea metody wielopunktowej, jako MRS wyższego rzędu, opisana przez L. Collatza w latach 50-tych ubiegłego wieku, została zapomniana z powodu złożonych obliczeń, zbyt trudnych bez wykorzystania współczesnych technik komputerowych.

Nowa bezsiatkowa wielopunktowa MRS, opracowana w mojej pracy doktorskiej, rozszerza idee Collatza na zastosowanie dla dowolnie sformułowanych (w sposób mocny, słaby, mieszany) zagadnień inżynierskich, na dowolnie nieregularnie rozłożonej chmurze węzłów, z wykorzystaniem aproksymacji metodą ważonych najmniejszych kwadratów (MWLS) zamiast interpolacji stosowanej przez Collatza. Pozwoliło to na otrzymanie w pełni zautomatyzowanego narzędzia analizy do uzyskania wysokiej jakości rozwiązań zagadnień inżynierskich, jak również doskonałego narzędzia oszacowania błędów.

Jak każda metoda, wielopunktowa BMRS ma swoje cechy charakterystyczne, zalety i wady. Moje prace po doktoracie dotyczą możliwości zastosowania metody do bardziej złożonych problemów inżynierskich – takich jak zagadnienia geometrycznie i fizycznie nieliniowe, a także analiza materiałów niejednorodnych. Metoda wielopunktowa została rozwinięta pod kątem takich zagadnień, zbadana, przetestowana i opisana w omawianych publikacjach. Opracowano algorytmy postępowania, dobrano odpowiednie wersje metody do poszczególnych typów zagadnień, wykazano i opisano mocne i słabe strony. Pozwala to w przyszłości rozwiązywać złożone zagadnienia mechaniki różnych typów wykorzystując wielopunktową metodę jako narzędzie, które łączy zalety metod bezsiatkowych z jakością rozwiązania wyższego rzędu dotychczas dominującą w MES.

Uogólniony, ujednolicony opis metody wielopunktowej przedstawiłam w pracy [A5]. Wyższy rząd aproksymacji otrzymujemy uwzględniając kombinację wartości funkcji niewiadomej wraz z kombinacją dodatkowych stopni swobody we wszystkich węzłach gwiazdy różnicowej. Idee podejścia zilustrowano wyprowadzonymi wielopunktowymi operatorami różnicowymi typu

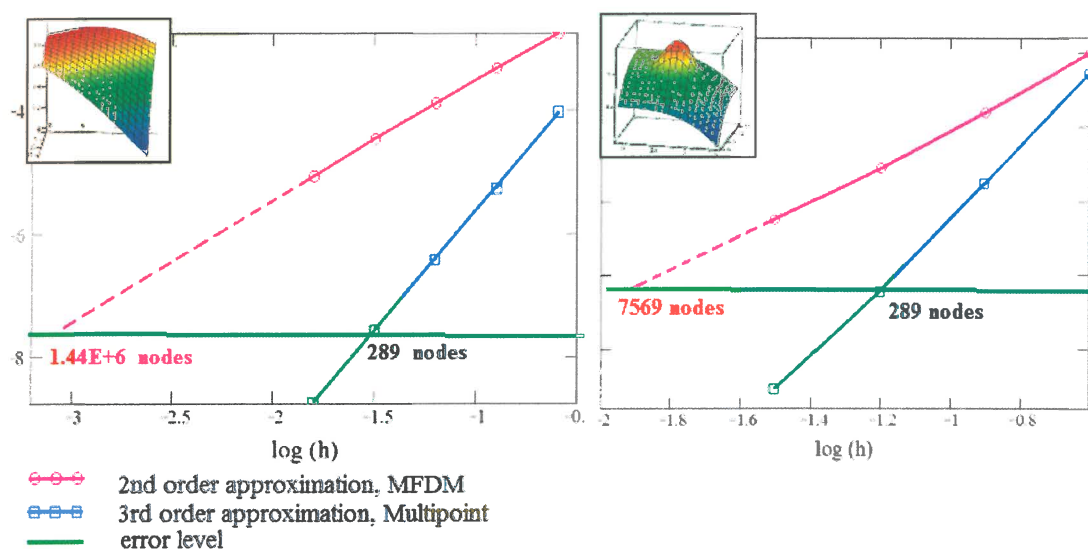
$$\sum_{j(i)} c_j u_j = \sum_{j(i)} \alpha_j f_j, \quad (1)$$

o różnych rzędach aproksymacji dla pochodnych w 1D i 2D. Tutaj  $P_i$  – węzeł centralny gwiazdy różnicowej zawierającej węzły  $P_j$ ,  $j = 1 \dots m$ ,  $f$  – dodatkowe stopnie swobody, np. wartości prawej strony równania różniczkowego,  $c_j$  i  $\alpha_j$  – współczynniki.

W artykule przeanalizowałam zbieżność zarówno otrzymanego rozwiązania jak i jego pochodnych w porównaniu z MES. Stwierdziłam, że tempo zbieżności pochodnych



uzyskanych za pomocą podejścia wielopunktowego jest tego samego rzędu, co tempo zbieżności samego rozwiązania – co jest bardzo pożądaną cechą przy rozwiązywaniu zagadnień inżynierskich. Dokonałam analizy efektywności metody porównując gęstość siatki potrzebnej do uzyskania wymaganego poziomu błędu za pomocą BMRS 2-go rzędu i podejścia wielopunktowego 3-go rzędu aproksymacji. Na przykładach pokazałam dużą przewagę pod tym względem nowej metody wyższego rzędu (Rys. 1). Rozwiązanie wielopunktowe 2-go rzędu jest prawie identyczne z rozwiązaniem BMRS, ale uzyskane w nieco bardziej skomplikowany sposób. Dlatego opisywana metoda jest stosowana wyłącznie dla wyższych rzędów aproksymacji.



**Rys. 1.** Zbieżność rozwiązania metody wielopunktowej i BMRS (zagadnienie Poissona z różnymi prawymi stronami). Liczba węzłów siatki potrzebna do uzyskania odpowiedniego poziomu błędu [A2], [B1]

*Ogólne podejście metody wielopunktowej – wersje.*

Istnieją dwie podstawowe wersje metody wielopunktowej – podejście szczególne, gdzie jako dodatkowe stopnie swobody w operatorach różnicowych występują wartości prawej strony rozważanego równania różniczkowego (1), oraz podejście ogólne – wykorzystujące jako dodatkowe stopnie swobody wybrane pochodne funkcji niewiadomej

$$\sum_{j(i)} c_j u_j = \sum_{j(i)} \alpha_j u_j^{(k)}. \quad (2)$$

Podejście szczególne (*specific*) jest prostsze i łatwiejsze przy obliczeniach komputerowych, ale nadaje się tylko do sformułowań mocnych zagadnień liniowych. Natomiast podejście ogólne (*general*) jest bardziej złożone, z możliwością zastosowania w rozmaitych zagadnieniach (w tym nieliniowych), sformułowanych w sposób mocny (lokalny), słaby (globalny), oraz mieszany (lokalno-globalny, MLPG). Podstawową cechą tego podejścia są wprowadzone zależności pochodnej rzędu  $k$  od funkcji niewiadomej w całym obszarze

$$\mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{A} \mathbf{U}, \quad (3)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  – macierz współczynników. Mając takie zależności dla dowolnej pochodnej, możemy dokonać aproksymacji dowolnego równania różniczkowego lub funkcjonału. Z tego powodu, ogólne podejście metody wielopunktowej można uznać za narzędzie rozwiązywania szerokiej klasy zagadnień inżynierskich. Niestety, ze względu na wyższy rząd aproksymacji stosowany w metodzie wielopunktowej, możliwe jest występowanie złego uwarunkowania

macierzy sztywności, zwłaszcza w przypadku regularnej siatki. Żeby uniknąć tej niedogodności, opracowałam rozmaite wersje podejścia ogólnego metody wielopunktowej. W artykule [A6] przeanalizowałam przyczyny występowania osobliwości oraz opisałam wersje metody, zezwalające na uniknięcie złego uwarunkowania.

Złe uwarunkowanie dotyczy głównie regularnej siatki węzłów i symetrycznych gwiazd, za pomocą których chcemy uzyskać wyższe pochodne w jednym kierunku (np.  $X$ ), stosując jako dodatkowe stopnie swobody pochodne w innym kierunku (np.  $Y$ ). Proponowane wersje uniknięcia problemu uwzględniają:

- stosowanie niesymetrycznych gwiazd – wyciągniętych w kierunku osi  $X$  przy wykorzystaniu jako dodatkowe stopnie swobody pochodnych  $u_y$ , oraz w kierunku  $Y$  – dla pochodnych  $u_x$  (wersje 2 i 3);
- przyjęcia jako dodatkowe stopnie swobody pochodnych w obydwu kierunkach – zarówno  $u_x$  jak i  $u_y$  (wersja 4);
- wykorzystanie tzw. regularyzacji (wersja 5).

Wersja z regularyzacją, którą po raz pierwszy opracowałam i opisałam w zastosowaniu do metody wielopunktowej w [A6], jest najprostszą wersją, która daje dobre wyniki najmniejszym kosztem, aczkolwiek nie jest w 100% niezawodną wersją w odróżnieniu od pozostałych i wymaga odpowiedniego „ręcznego” dopasowania współczynnika regularyzacji  $\varepsilon$  w funkcjonalie błędu

$$\tilde{J} = \|u - \bar{u}\|_{W_0}^2 + \|u^{(k)} - \bar{u}^{(k)}\|_{W_k}^2 + \varepsilon \left( \|u - \bar{u}\|_{F, W_0}^2 + \|u^{(k)} - \bar{u}^{(k)}\|_{F, W_k}^2 \right), \quad (4)$$

który jest bardzo małą liczbą  $1.E-11 < \varepsilon < 1.E-7$ . Tutaj  $\bar{u}$  – rozwinięcie węzłowej wartości  $u$  w okrojony szereg Taylora względem punktu centralnego gwiazdy.

Wszystkie proponowane wersje ogólnego podejścia metody wielopunktowej porównałam pod kątem tempa zbieżności oraz czasu obliczeniowego. Metoda regularyzacji, jak już wspomniano, jest najprostszą, ale wymaga dopasowania do konkretnej dyskretyzacji wartości współczynnika regularyzacji i nie daje gwarancji uniknięcia osobliwości. Wersje z niesymetrycznymi gwiazdami są stabilne i szybkie, natomiast wymagają generacji dwóch typów gwiazd – zarówno w kierunku  $X$ , jak i w kierunku  $Y$ , co, w przypadku np. gwiazd na brzegu, może powodować nieco gorszy wynik. Generacja takich gwiazd jest procesem jednorazowym i szybkim, wymagającym jednak doboru odpowiedniego kryterium i dobrego algorytmu. Wersja z wykorzystaniem obydwu typów pochodnych  $u_x$  i  $u_y$  jako dodatkowych stopni swobody jest najlepsza do niezbyt dużych zadań z powodu mało wymagającej gwiazdy symetrycznej. W przypadku bardzo dużych zagadnień obliczeniowych należy tutaj liczyć się ze wzrostem czasu obliczeniowego.

### *Lokalno-globalne sformułowanie typu MLPG*

Wielopunktową BMRS możemy stosować do zagadnień inżynierskich sformułowanych w sposób mocny, słaby (w postaci zasady wariacyjnej lub jako zadanie minimalizacji funkcjonalu energii potencjalnej), oraz mieszany – lokalno-globalny, np. MLPG (Meshless Local Petrov-Galerkin), gdzie funkcje próbna  $u$  i testowa  $v$  są różne od siebie i dziedziną funkcji testowej są lokalne podobszary  $\Omega_i$ , do których z kolei stosuje się podejście wariacyjne. Sformułowania MLPG (koncepcja S.Atluri) różnią się w zależności od typu przyjętej funkcji testowej. Mają one (zwłaszcza MLPG5, w którym funkcja testowa jest funkcją Heavisida w podobszarach) wiele zalet. Połączenie metody wielopunktowej i podejścia MLPG5

opracowałam w artykule [A9]. Wyprowadziłam wzory, przetestowałam na konkretnych zagadnieniach, dokonałam analizy błędów oraz tempu zbieżności.

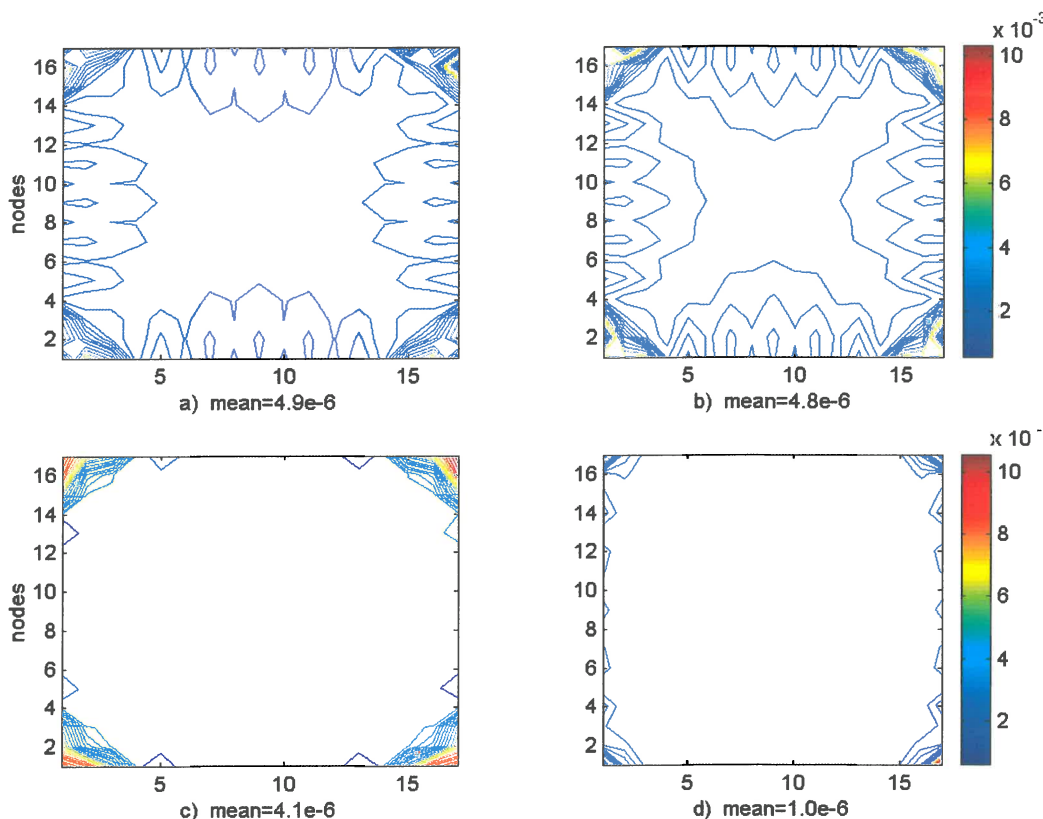
Jako podobszary  $\Omega_i$  funkcji testowej w postaci funkcji Heaviside

$$v(P) = \begin{cases} 1, & P \in \Omega_i \\ 0, & P \notin \Omega_i \end{cases}$$

w podejściu MLPG5 w zadaniach dwuwymiarowych mogą zostać wybrane wielokąty Voronoi lub trójkąty Delaunay. Uwzględniając wartości pochodnych  $v$ , które odpowiednio są zerowe w podobszarze  $\Omega_i$ , sformułowanie wariacyjne np. zagadnienia  $u'' = f$  z odpowiednimi warunkami brzegowymi przyjmuje prostą postać

$$\int_{\Omega_i} (u'v' + fv) dx = \int_{\partial\Omega_i} u'nv ds \quad \rightarrow \quad \int_{\Omega_i} f dx = \int_{\partial\Omega_i} u'n ds \quad (5)$$

gdzie  $u(x) \in H^1(\Omega)$ ,  $v(x) \in H^1(\Omega_i)$ ,  $n$  – wektor normalny. Prowadzi to do uproszczenia obliczeń i w związku z tym znaczącej redukcji czasu obliczeniowego. Całkowanie przeprowadzamy w podobszarach  $\Omega_i$  (np. dookoła węzłów siatki w przypadku wielokątów Voronoi) i na ich brzegu za pomocą kwadratur Gaussa. Do aproksymacji pochodnych funkcji próbnej  $u$  stosujemy metodę wielopunktową. W ten sposób uzyskujemy układ równań algebraicznych, z którego znajdujemy niewiadome wartości  $u$ .



**Rys. 2.** Błąd rzeczywisty rozwiązania (wypadkowe naprężenie styczne) w przecie pryzmatycznym o przekroju kwadratowym, 2gi rząd aproksymacji: a) BMRS, b) wielopunktowa BMRS; wielopunktowa BMRS, 3ci rząd aproksymacji: c) sformułowanie słabe, d) sformułowanie MLPG5 [A9]

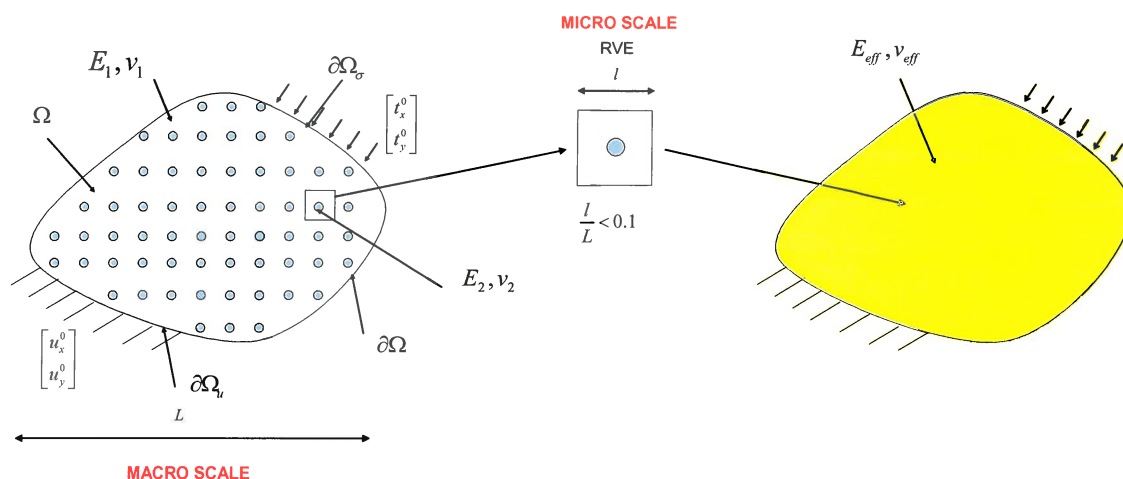
Oprócz pojedynczych elementów (trójkątów czy wielokątów), jako dziedzinę liniowej funkcji testowej można przyjąć tzw. patche trójkątów z wspólnym węzłem  $i$  w środku, zbudowane na gwieździe MRS, i funkcją liniową  $v = ax + by + c$  w obrębie każdego trójkąta  $\Omega_s \subset \Omega_i$ , która ma wartość 1 w węźle  $i$  oraz 0 w pozostałych.

Korzystając z sformułowania MLPG5 i podejścia wielopunktowego rozwiązałam szereg zadań testowych, wśród których znalazło się zadanie benchmarkowe ze znanym rozwiązaniem analitycznym. Dokonałam również analizy błędów. Dokładność rozwiązania w sformułowaniu MLPG5 w większości przeprowadzonych testów była wyższa. Na Rys. 2 przedstawiono rozkład błędu rozwiązania zagadnienia skręcania pręta (de Saint-Venant'a) o przekroju kwadratowym ze znanym rozwiązaniem analitycznym dla różnych sformułowań i rzędów aproksymacji metodą wielopunktową a także BMRS.

Zastosowanie sformułowania lokalno-globalnego MLPG5 pozwala znacząco zredukować czas obliczeń i wraz z metodą wielopunktową uzyskać wysokiej dokładności rozwiązanie, które w przeprowadzonych testach okazało się lepsze niż analogiczne rozwiązanie w innym sformułowaniu słabym lub mocnym.

#### 4.4.3 Dwuskalowa analiza materiałów niejednorodnych

Aktualne w ostatnich latach zagadnienia homogenizacji materiałów niejednorodnych, bazujące na fizycznych i geometrycznych właściwościach poszczególnych faz materiału, w podejściu wieloskalowym najczęściej są rozwiązywane za pomocą Metody Elementów Skończonych (MES). Zjawiają się również alternatywne podejścia, bazujące na rozmaitych metodach z obszaru metod bezsiatkowych. W artykule [A4] po raz pierwszy opisano zastosowanie BMRS do dwuskalowej analizy materiałów niejednorodnych. Opracowano sformułowanie homogenizacji numerycznej pod kątem BMRS. Na poziomie makro rozpatrzono niejednorodny materiał z wtrąceniami, rozmieszczonymi periodycznie. Wartości efektywnych stałych materiałowych wyznaczono za pomocą obliczeń przeprowadzonych w skali mikro dla pojedynczego reprezentatywnego elementu objętościowego RVE (Rys. 3), w którym szczegółowo uwzględniono właściwości wtrąceń.

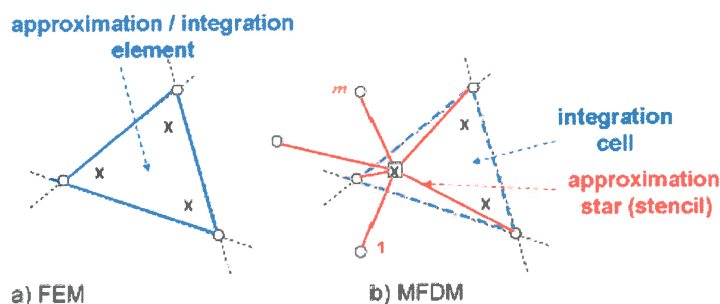


Rys. 3. Sformułowanie problemu homogenizacji [A4]

Opracowano podstawowe etapy algorytmu BMRS w mikro i makro skali zadania. Między innymi, skupiono się na aproksymacji i całkowaniu numerycznym (Rys. 4), które w podejściu BMRS można dokonać zarówno w obszarze trójkąta Delaunay – między węzłami, jak i w wielokącie Voronoi – dookoła węzła.



Podejście przetestowano dla różnych typów RVE, różniących się rozmiarem i lokalizacją wtrąceń, dla których uzyskano bardzo zbliżone wyniki uśrednionych efektywnych stałych materiałowych. Badano również wpływ dopasowania siatki do inkluzji oraz błąd metody poprzez porównanie wyniku na rzadszej i gęstszej siatce.

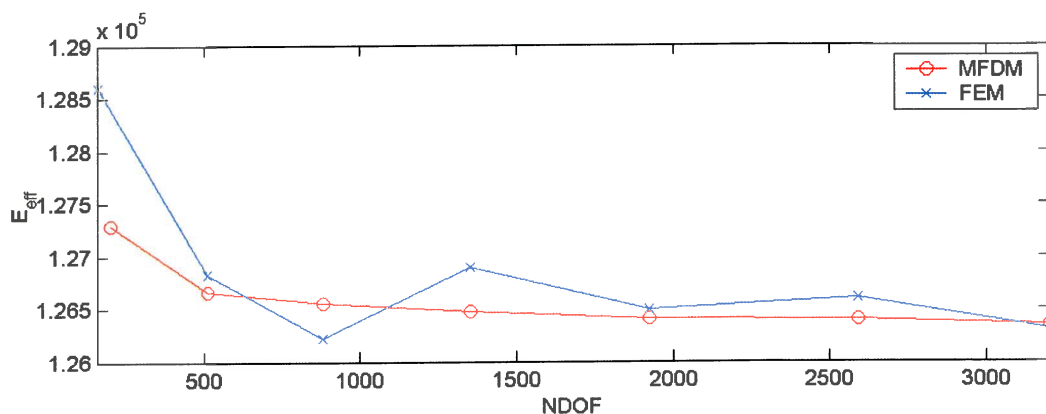


Rys. 4. Porównanie obszarów całkowania i aproksymacji w MES i BMRS [A4]

Przeanalizowano tempo zbieżności efektywnych stałych materiałowych na ciągu siatek i porównano z wynikami uzyskanymi za pomocą MES. W przeprowadzonych testach BMRS wykazała się szybszą stabilizacją rozwiązania niż MES (Rys. 5).

Rozwiązano zagadnienia testowe w skali makro i porównano wyniki z bezpośrednim rozwiązaniem bez przeprowadzenia wstępnej homogenizacji numerycznej.

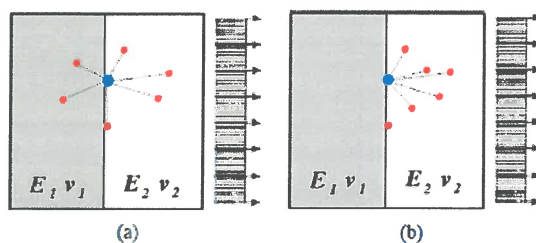
Artykuł był uznany przez głównego edytora „International Journal for Multiscale Computational Engineering” J. Fisha za interesujący i niezwykle ze względu na zaproponowane podejście. W trakcie pracy wykryto problem oscylacji rozwiązania na brzegu wtrącenia w mikrokomorze RVE, który mógł być związany z utratą stabilności lub problemem uwarunkowania.



Rys. 5. Zbieżność rozwiązania BMRS i MES [A4]

W swojej kolejnej pracy [A8] zajęłam się badaniem tego zjawiska. Rozważana była opcja dopasowania siatki do inkluzji, która miała wpływ na wynik, ale nie zbyt istotny. Zwykle zagęszczenie siatki powodowało podobny efekt. Natomiast oscylacje pozostawały. Na ich amplitudę znaczący wpływ miała liczba punktów Gaussa stosowana do numerycznego całkowania. Zaproponowałam wykorzystanie lokalnej aproksymacji MWLS wyłącznie na gwiazdach dopasowanych do wtrąceń (Rys. 6, 7). Z jednej strony, gwiazdy mocno niesymetryczne powodują nieco gorszą aproksymację, natomiast z drugiej – pozwalają na uzyskanie bardzo dobrego wyniku na brzegu wtrącenia.

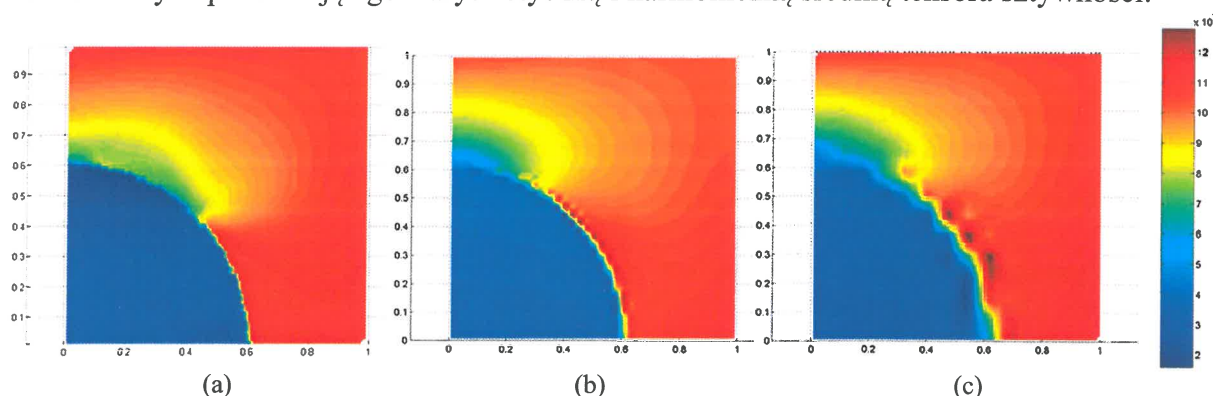
Rozwijaniu analizy zagadnień dwuskalowych za pomocą BMRS, wstępnie opisanej w [A4] poświęcony został artykuł [A3]. Zbadałam i opisałam cechy charakterystyczne BMRS w zastosowaniu do materiałów niejednorodnych. Przeanalizowałam i przetestowałam problem możliwości skokowej zmiany składowych tensora naprężenia na granicy inkluzji w mikroskali, związany z różnymi stałymi materiałowymi, w przypadku zagadnień sformułowanych zarówno w sposób mocny, jak i słaby przy zastosowaniu BMRS. Analitycznie potwierdziłam spełnienie warunku ciągłości przemieszczeń i wektora naprężeń w obydwu sformułowaniach, co pokazuje poprawność rozwiązania uzyskanego za pomocą BMRS.



**Rys. 6.** Konfiguracja gwiazdy w RVE: (a) węzły gwiazdy należą do obydwu części materiału; (b) gwiazda dostosowana do materiału [A3]

Kolejne badania dotyczyły procedury homogenizacji mikrokomórki RVE. Analizowałam zagadnienie sprężystości dla anizotropowego materiału periodycznego z dwoma typami inkluzji. Przeprowadziłam wirtualne testy dla różnych typów obciążeń przy kinematycznych warunkach brzegowych i obliczyłam następnie uśredniony tensor efektywnych stałych materiałowych oraz współczynnik anizotropii materiału. Wynik porównałam z rozwiązaniem otrzymanym za pomocą MES oraz homogenizacji asymptotycznej. Wszystkie uzyskane wartości rozwiązania są bliskie sobie.

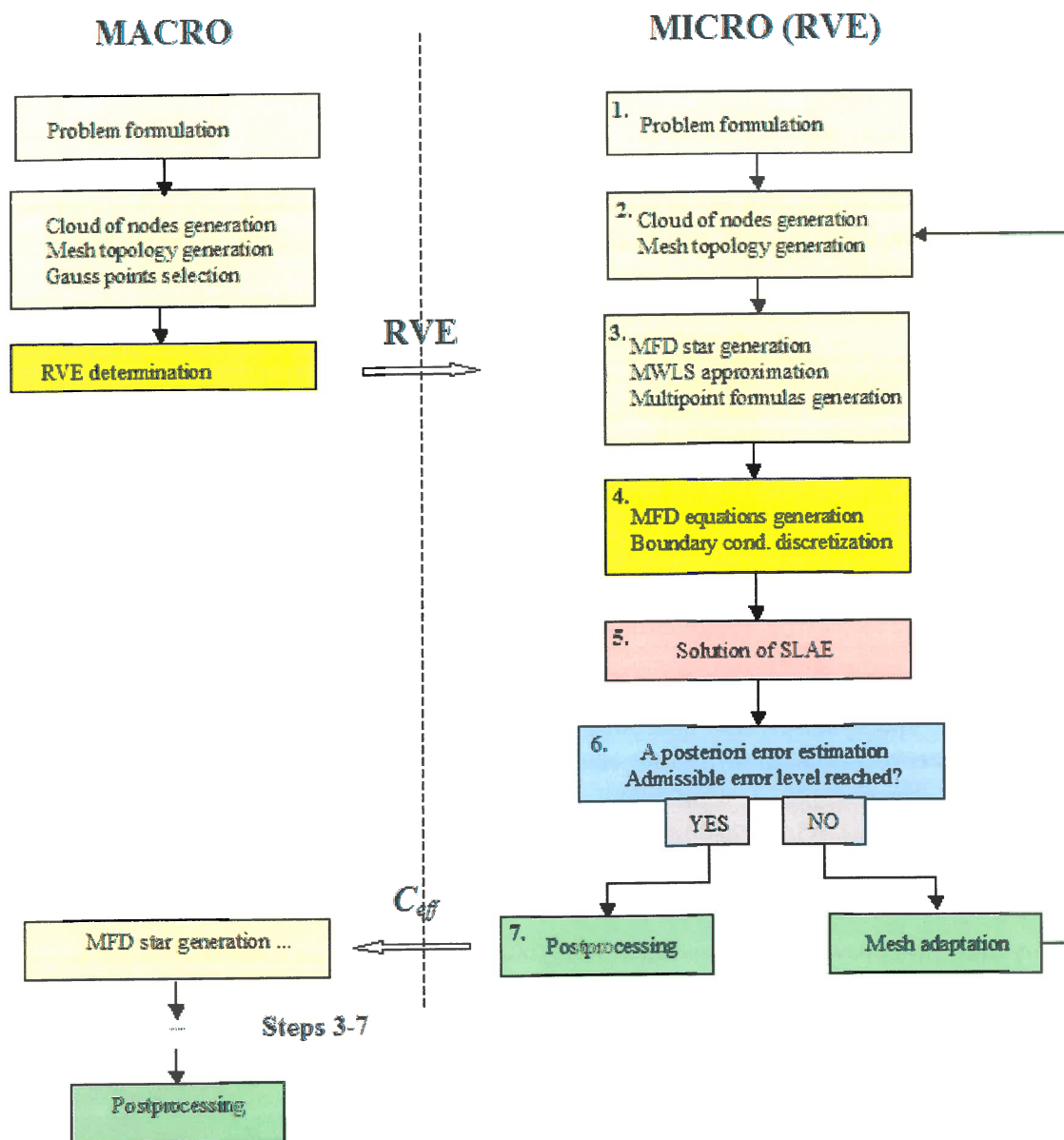
Pomyślnie przeprowadziłam również weryfikację otrzymanego tensora efektywnych stałych materiałowych porównując go z arytmetyczną i harmoniczną średnią tensora sztywności.



**Rys. 7.** Odształcenia uzyskane metodą wielopunktową w RVE: (a) siatka i gwiazdy dopasowane do inkluzji; (b) tylko siatka dopasowana do inkluzji; (c) regularna siatka i gwiazdy niedopasowane do wtrącenia [A3]

Badania, prowadzone w poprzednich pracach i związane z wieloskalową analizą BMRS, stanowiły punkt wyjściowy rozwinięcia modyfikacji wyższego rzędu BMRS – metody wielopunktowej w zastosowaniu do zagadnień analizy materiałów niejednorodnych. Algorytm homogenizacji, bazujący na podejściu wielopunktowym (Rys. 8), opracowałam i szczegółowo opisałam w artykule [A1] z uwzględnieniem cech charakterystycznych metody.





Rys. 8. Algorytm homogenizacji numerycznej za pomocą metody wielopunktowej [A1]

W sformułowaniu słabym, stosowanym w skali mikro, wykorzystuję podejście Petrova-Galerkina, gdzie funkcje testowa  $v$  i próbna  $u$  są różne. Do aproksymacji funkcji próbnej oraz jej pochodnych stosuję metodę wielopunktową, bazującą na gwiazdach różnicowych, natomiast dla funkcji testowej i jej pochodnych najprościej zastosować interpolację liniową na trójkątach. Szereg przeprowadzonych testów nie wykazał wpływu typu i jakości aproksymacji funkcji testowej na wyniki.

Przy aproksymacji funkcji próbnej za pomocą podejścia wielopunktowego, podobnie jak w przypadku BMRS, udowodniłam ważność dostosowania gwiazd różnicowych do inkluzji. Z tego powodu ważnym staje się odpowiedni dobór kryterium generacji gwiazd różnicowych związany również z wyborem wersji stosowanego podejścia ogólnego metody wielopunktowej. Wersje 2 i 3 (z gwiazdą zmodyfikowaną w zależności od przyjętych dodatkowych stopni swobody) raczej nie powinny być stosowane w skali mikro. Optymalnym (najprostsza wersja) wydają się być połączenie wersji 4-XY i kryterium „najbliższego

sąsiada” generacji gwiazd lub „sąsiadów Voronoi” we wnętrzu i „najbliższego sąsiada” na granicy między materiałami.

Do całkowania zagadnienia homogenizacji w RVE w postaci wariacyjnej

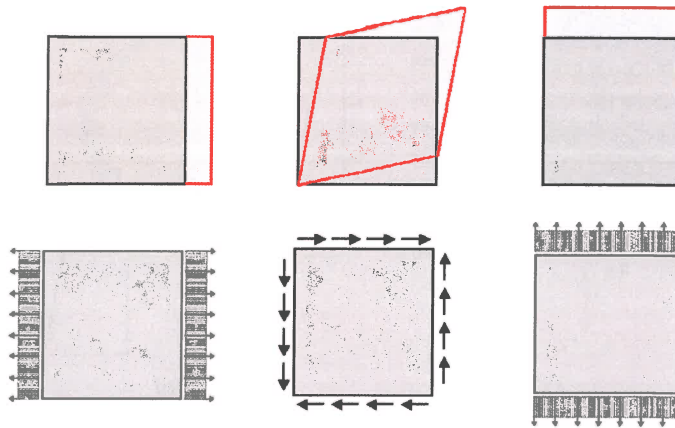
$$\begin{cases} \int_{\Omega^{RVE}} \frac{E}{1-\nu^2} \left( (u_{x,x} + \nu u_{y,y}) v_{x,x} + \frac{1-\nu}{2} (u_{x,y} + u_{y,x}) v_{x,y} \right) d\Omega^{RVE} = \int_{\partial\Omega_N^{RVE}} t_x^0 v_x ds \\ \int_{\Omega^{RVE}} \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{1-\nu}{2} (u_{x,y} + u_{y,x}) v_{y,x} + (\nu u_{x,x} + u_{y,y}) v_{y,y} \right) d\Omega^{RVE} = \int_{\partial\Omega_N^{RVE}} t_y^0 v_y ds \end{cases}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega^{RVE}) \quad (6)$$

stosowane są kwadratury Gaussa w podobozarach, które mogą zupełnie się nie pokrywać z dziedzinami aproksymacji funkcji testowej czy próbnej. Zazwyczaj korzystamy z wielokątów Voronoi – wtedy całkowanie odbywa się dookoła węzła, lub z trójkątów Delaunay – całkowanie między węzłami.

Ze względu na wysoką jakość wyników, metoda wielopunktowa może być wykorzystana do obliczenia rozwiązania odniesienia, zastępującego rozwiązanie analityczne przy oszacowaniu błędu a posteriori. Po uzyskaniu rozwiązania, można łatwo dokonać analizy błędów porównując rozwiązanie wyższego rzędu, obliczone za pomocą metody wielopunktowej, oraz rozwiązanie BMRS drugiego rzędu. W przypadku występowania zbyt dużego błędu w podobozarach można lokalnie zmodyfikować siatkę węzłów przemieszczając istniejące lub wprowadzając nowe węzły, co w metodach bezsiatkowych jest znacznie prostsze niż w MES.

Na etapie postprocessingu, który nie wymaga większych obliczeń ze względu na idee BMRS (operatory różnicowe są wyprowadzane od razu dla całego zestawu pochodnych), a także cechą ogólnego podejścia metody wielopunktowej (3) (zależności pochodnych od rozwiązania w całym obszarze) – znajdujemy potrzebne naprężenia i odkształcenia.

Uśredniony tensor efektywnych stałych materiałowych obliczam przeprowadzając testy w RVE dla różnych typów obciążeń w warunkach brzegowych kinematycznych lub statycznych (Rys. 9)



Rys. 9. a) Przemieszczenia przyjętych kinematycznych warunków brzegowych;  
b) przyjęte wektory naprężeń statycznych warunków brzegowych [A1]

Następnie można obliczyć wskaźnik izotropii.

Dwuskalową analizę materiałów niejednorodnych za pomocą podejścia wielopunktowego przetestowałam na szeregu zadań. Obliczyłam efektywne stałe materiałowe dla rozmaitych co do wielkości i konfiguracji RVE, zbieżność których porównałam z wynikami uzyskanymi na ciągu siatek za pomocą MES. Podobnie jak w przypadku z BMRS, metoda wielopunktowa

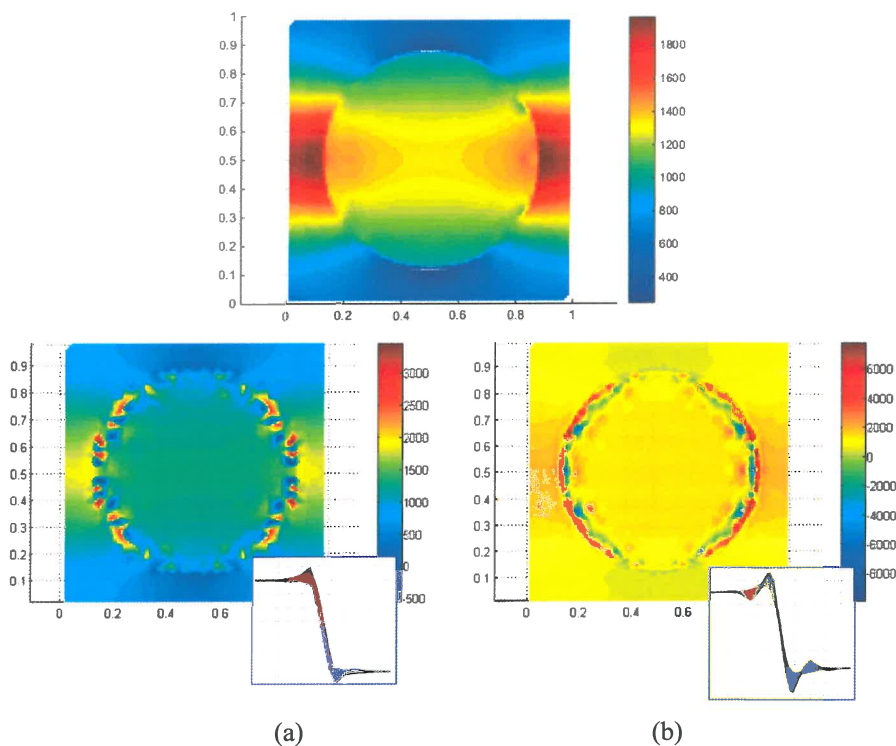
wykazała się szybszą stabilizacją wyników. W przypadku niedopasowania gwiazd różnicowych do inkluzji w RVE wykazałam zależność amplitudy oscylacji od liczby stosowanych punktów Gaussa (Rys. 10).

Obliczyłam uśrednione parametry materiałowe dla kinematycznych oraz statycznych warunków brzegowych i porównałam z wynikami uzyskanymi za pomocą BMRS, MES, oraz metody homogenizacji asymptotycznej.

Kinematyczne i statyczne warunki brzegowe (w.b.) dają wyniki zgodne ze znanym wykresem zbieżności tzw. pozornych (apparent) parametrów materiałowych do efektywnych w zależności od typu warunków – przemieszczeniowe i naprężeniowe warunki brzegowe dają rozwiązania zbliżające się z różnych stron do wartości efektywnej, przy czym statyczne warunki prowadzą do lepszych wyników.

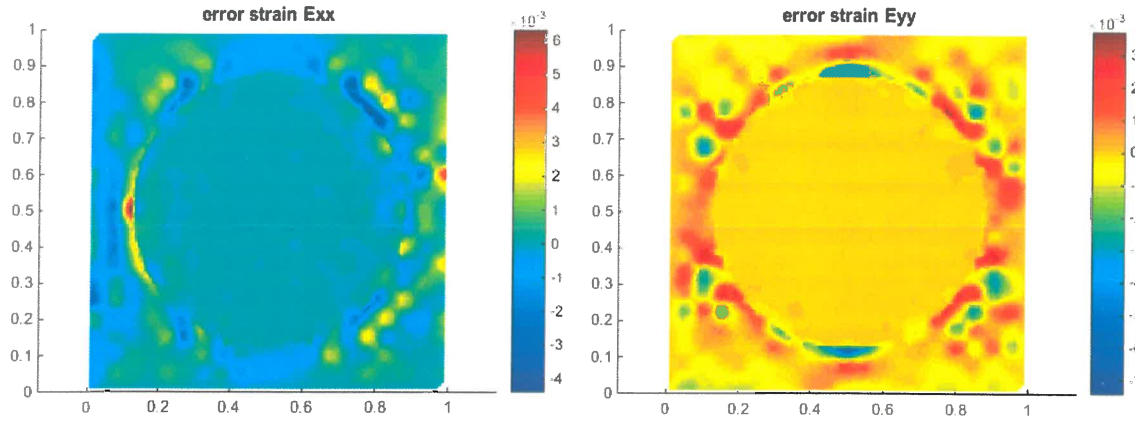
Weryfikację homogenizacji przeprowadziłam za pomocą warunku Hilla-Mandela, który jest przyjmowany jako kryterium poprawności analizy wieloskalowej i oznacza że gęstość energii w RVE równa się gęstości energii w makroskali.

Z matematycznego punktu widzenia warunek Hilla-Mandela gwarantuje istnienie górnej i dolnej granicy efektywnego tensora sztywności, co potwierdza również porównanie z arytmetyczną i harmoniczną średnią tensora.



**Rys. 10.** Naprężenia  $\sigma_{xx}$  dla pierwszego przypadku obciążeniowego, kinematyczne w.b.: gwiazdy dopasowane do inkluzji; gwiazdy nie dopasowane do inkluzji z 1 (a) i 3 (b) punktami Gaussa [A1]

Dokonałam również oszacowania błędu a posteriori porównując rozwiązania 2go rzędu BMRS oraz 3go rzędu metodą wielopunktową (Rys. 11). Wykonałam szereg testów dla różnych zadań i uzyskałam błąd rozwiązania od 2% do max 10%. Należy zaznaczyć, że w ten sposób oszacowano błąd rozwiązania BMRS 2go rzędu. Natomiast błąd metody wielopunktowej 3go rzędu jest odpowiednio mniejszy.



**Rys. 11.** Błąd rozwiązania uzyskany porównaniem 2go (BMRS) i 3go (metoda wielopunktowa) rzędów aproksymacji. Pierwszy przypadek obciążeniowy, kinematyczne w.b. [A1]

Pokazano to na zadaniu benchmarkowym z znanym rozwiązaniem analitycznym w skali makro, gdzie porównano zbieżność metody BMRS 2go rzędu oraz wielopunktowej 3go rzędu w sformułowaniach słabym i MLPG5.

#### 4.4.4 Analiza zagadnień nieliniowych

Metodę wielopunktową rozwinęłam również pod kątem rozwiązywania zagadnień nieliniowych – zarówno geometrycznie, jak i fizycznie.

W artykule [A2] szczegółowo omówiłam analizę zagadnień nieliniowych za pomocą metody wielopunktowej – opracowałam sformułowanie, algorytm, oraz przykłady. Ponadto, w publikacji [A7] poruszyłam problem analizy zagadnień fizycznie nieliniowych.

##### *Zagadnienia nieliniowe geometrycznie*

Podejście ogólne metody wielopunktowej stosowane w zagadnieniach nieliniowych bazuje na globalnej zależności typu (3), wyprowadzonej dla całego obszaru, która przede wszystkim dotyczy pochodnych, przyjętych jako dodatkowe stopnie swobody. Wielopunktowe wzory różnicowe typu

$$D\mathbf{u} = \mathbf{c} \mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{u}^{(k)}, \quad (7)$$

( $\mathbf{c}$  i  $\boldsymbol{\alpha}$  są macierzami współczynników) dla całego zbioru pochodnych funkcji niewiadomej  $D\mathbf{u} = D\mathbf{u}_i = \{u_i, u'_i, u''_i, \dots, u_i^{(p)}\}$  – są operatorami lokalnymi w obrębie gwiazdy różnicowej i, ze względu na specyfikę metody wielopunktowej, nie przekładają się bezpośrednio na obszar globalny.

Zależności (3) w podejściu ogólnym początkowo są wyprowadzone tylko dla pierwszych pochodnych  $u_x$  i  $u_y$  lub, w niektórych wersjach, również dla drugich –  $u_{xx}$  i  $u_{yy}$ . Pochodne wyższego rzędu oraz mieszane możemy uzyskać za pomocą składania pochodnych niższych rzędów

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_y = \mathbf{B}\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u}_{xx} = \mathbf{A}^2\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_{xy} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_{yy} = \mathbf{B}^2\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_{xxy} = \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (8)$$

W artykule [A2] ten temat został poruszony, szczegółowo zbadany i opisany pod kątem metody wielopunktowej. Pokazałam, że uzyskane w ten sposób aproksymacje pochodnych są



bardzo dobrej jakości i nieco większy, ale wciąż mały błąd  $10^{-6} - 10^{-10}$  występuje tylko na brzegu.

Mając w ten sposób, poprzez relacje (3), zdefiniowane wszystkie pochodne – możliwa jest analiza szerokiej klasy zagadnień inżynierskich, w tym zagadnień nieliniowych.

W artykule szczegółowo rozwinęłam algorytm postępowania i przytoczyłam schemat blokowy zastosowania podejścia do zagadnień nieliniowych. Wybór metody rozwiązywania problemów nieliniowych może być dowolny. Zazwyczaj stosujemy najbardziej rozpowszechnioną metodę Newtona-Raphsona. Występująca w niej macierz Jakobiego, w przypadku zastosowania podejścia wielopunktowego, jest iloczynem dwóch typów pochodnych

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \frac{\partial F_i}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial u_j} + \frac{\partial F_i}{(\partial u_x)_k} \frac{(\partial u_x)_k}{\partial u_j} + \frac{\partial F_i}{(\partial u_y)_k} \frac{(\partial u_y)_k}{\partial u_j} + \dots \quad (9)$$

z których pierwsza –  $\partial F_i / \partial u_j^{(s)}$ ,  $s = 0, 1, \dots$  może być obliczona analitycznie, np. poprzez różniczkowanie symboliczne, natomiast druga część – pochodna typu  $\partial u_j^{(s)} / \partial u_i$ , jest obliczona za pomocą operatorów metody wielopunktowej tylko raz dla danej dyskretyzacji.

Na przykład, jeżeli  $\mathbf{u}_x = \mathbf{A}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_y = \mathbf{B}\mathbf{u}$ , to  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{I}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{A}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{B}$ . Tutaj  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  – macierze współczynników,  $\mathbf{I}$  – macierz jednostkowa. W ten sposób znacząco skracamy czas obliczeń.

Z zastosowaniem podejścia wielopunktowego rozwiązałam dwa zadania testowe – duże ugięcia idealnej membrany (bańki mydlanej) oraz duże ugięcia płyty Karmana.

Mocno nieliniowe zagadnienie ugięcia membrany było rozwiązywane metodą iteracyjno-przyrostową z wykorzystaniem metody Newtona-Raphsona. Zagadnienie, sformułowane następująco

$$\begin{cases} \frac{u''_{xx} + u''_{yy} + (u''_{xx})^2 + (u''_{yy})^2 - 2(u''_{xy})^2}{\sqrt{(1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2)^3}} = p & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}, \quad (10)$$

po dyskretyzacji obszaru i obliczeniu pochodnych (pierwszych i drugich metodą wielopunktową, natomiast pochodnych mieszanych – poprzez składanie)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x &= \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_y = \mathbf{B}\mathbf{u} & \Rightarrow & \quad \mathbf{u}_{xy} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}; \\ \mathbf{u}_{xx} &= \mathbf{C}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_{yy} = \mathbf{D}\mathbf{u}; \end{aligned}$$

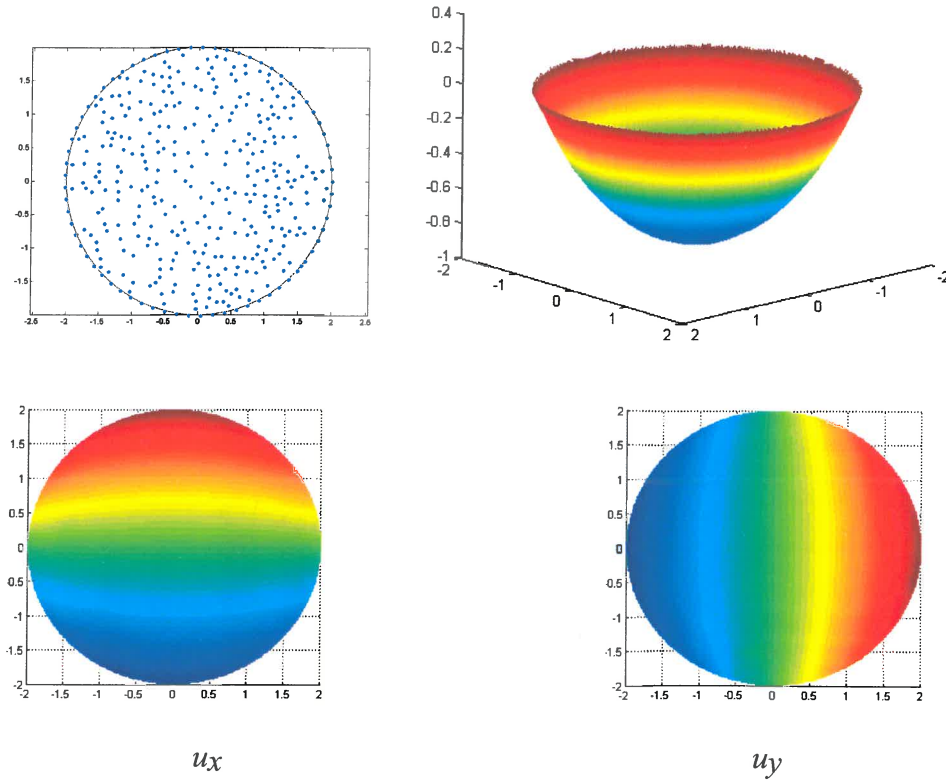
zapisujemy w postaci macierzowej

$$\begin{cases} \frac{(\mathbf{C} + \mathbf{D})\mathbf{u} + \text{diag}(\mathbf{C}\mathbf{u})\mathbf{C}\mathbf{u} + \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{D}\mathbf{u} - 4\text{diag}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u})\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}}{\sqrt{(1 + \text{diag}(\mathbf{A}\mathbf{u})\mathbf{A}\mathbf{u} + \text{diag}(\mathbf{B}\mathbf{u})\mathbf{B}\mathbf{u})^3}} = \mathbf{p} & \text{w } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{na } \partial\Omega \end{cases},$$

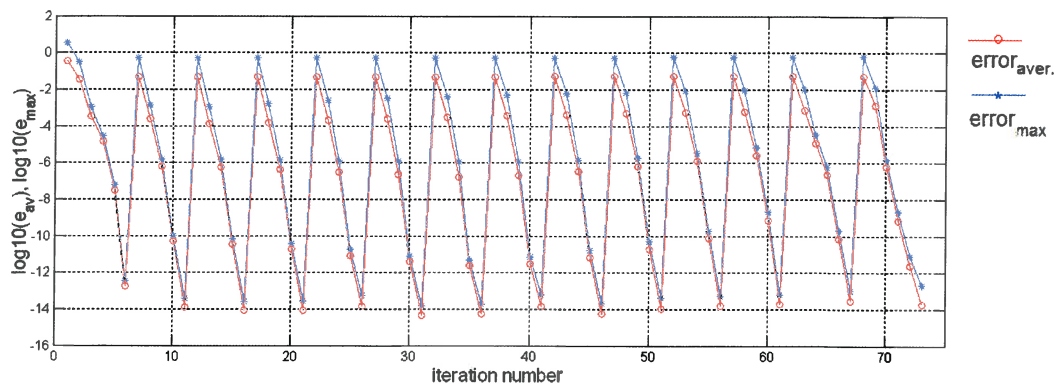
gdzie ‘diag’ wektora jest macierzą ze składowymi wektora na przekątnej.

Uzyskane wyniki (Rys. 12), zwłaszcza na siatce zupełnie nieregularnie rozłożonych węzłów, potwierdzają wysoką jakość rozwiązania uzyskanego za pomocą metody wielopunktowej.

Tempo zbieżności rozwiązania metodą wielopunktową 3go rzędu w podejściu przyrostowo-iteracyjnym, przy przyjętym błędzie dopuszczalnym  $\varepsilon_{adm} = 10^{-12}$ , jest zdecydowanie wyższe niż dla standardowej BMRS 2go rzędu, stosowanej wraz z modyfikacjami procedury Newtona-Raphsona, w tym z relaksacją [B4]. Dla wykonanych 14 kroków przyrostowych odpowiednio dobre rozwiązanie uzyskałam po 73 iteracjach (Rys. 13), około dwa razy szybciej, niż dla najlepszego wyniku uzyskanego z zastosowaniem BMRS przy różnych modyfikacjach metody Newtona-Raphsona.



**Rys. 12.** Nieregularna, losowo wygenerowana, siatka węzłów w obszarze kołowym i rozwiązanie zagadnienia ugięć idealnej membrany [A2]



**Rys. 13.** Zbieżność rozwiązania dla metody Newtona-Raphsona w podejściu wielopunktowym, 14 przypadków obciążenia [A2]

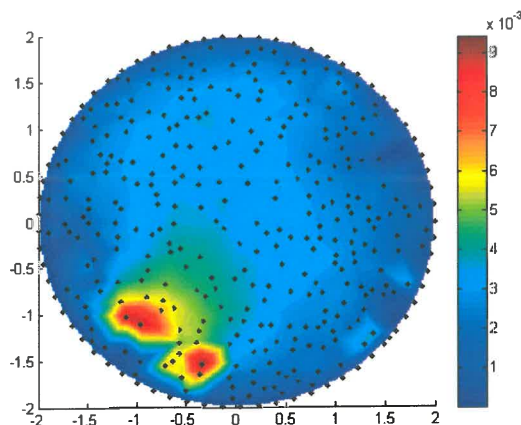


Kolejne zadanie nieliniowe – analiza dużych ugięć płyty Karmana – zadanie 4go rzędu rozwiązywałam za pomocą metody iteracji prostej z wykorzystaniem tzw. „staggered scheme”, czyli rozwiązywanie na każdym kroku iteracji po kolei dwóch równań czwartego rzędu:

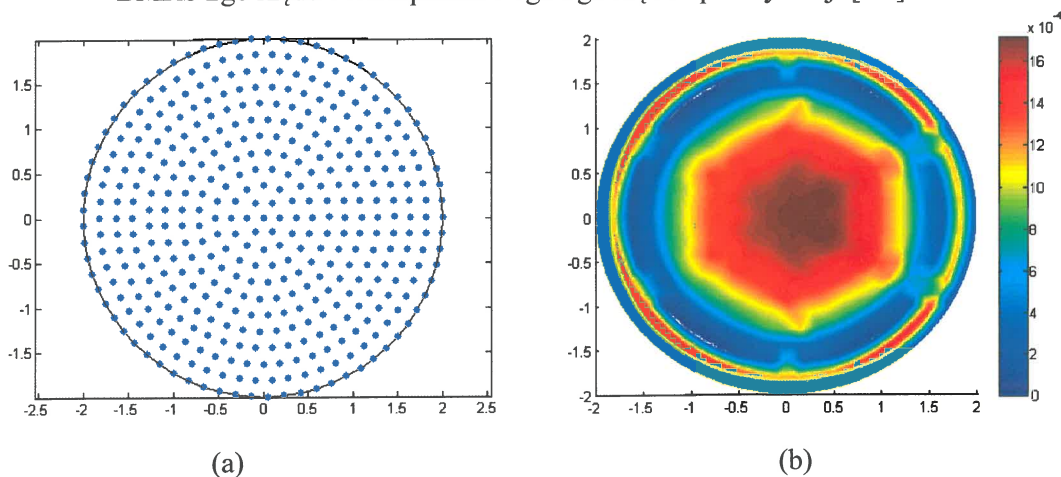
$$\begin{aligned} \nabla^4 F_{(j-1)} &= E(w_{xy(j-1)}^2 - w_{xx(j-1)}w_{yy(j-1)}), \\ D \cdot \nabla^4 w_{(j)} &= p_{(i)} + h(F_{yy(j-1)}w_{xx(j-1)} + F_{xx(j-1)}w_{yy(j-1)} - 2F_{xy(j-1)}w_{xy(j-1)}). \end{aligned} \quad (11)$$

Dla pochodnych pierwszego i drugiego rzędu stosowałam operatory obliczone za pomocą metody wielopunktowej 4go stopnia, natomiast pochodne mieszane oraz wyższych rzędów uzyskiwałam poprzez składanie operatorów rzędów niższych. Rozwiązałam zadania z płytą wolnopodpartą i z zamocowanymi brzegami.

W pracy analizowałam również błąd rozwiązania typu  $p$ - porównując rozwiązania uzyskane za pomocą 2go rzędu BMRS (które jest prawie identyczne z rozwiązaniem wielopunktowym 2go rzędu) i 3go rzędu metody wielopunktowej dla zagadnienia ugięć membrany na siatce dowolnie nieregularnej (377 węzłów, błąd max = 0.9%, Rys. 14), oraz regularnej (410 węzłów, błąd max = 0.16%, Rys. 15). Heksagonalny charakter błędu rozwiązania na rys. 15 wynika ze sposobu generacji siatki węzłów.



**Rys. 14.** Błąd rozwiązania typu  $p$ - na siatce dowolnie nieregularnej – porównanie rozwiązania BMRS 2go rzędu i wielopunktowego 3go rzędu aproksymacji [A2]



**Rys. 15.** Prawie regularna siatka, 410 węzłów (a); błąd rozwiązania typu  $p$ - (max = 0.16%), porównanie rozwiązania 2go rzędu i 3go rzędu aproksymacji (b) [A2]

Warto zaznaczyć, że tak oszacowany błąd dotyczy błędu rozwiązania uzyskanego metodą BMRS, natomiast w metodzie wielopunktowej jest on odpowiednio mniejszy.

### Zagadnienia nieliniowe fizycznie

Do przetestowania analizy fizycznie nieliniowej za pomocą podejścia wielopunktowego [A7] wybrałam problem de Saint-Venanta sprężysto-plastycznego skręcania prętów przyzmatycznych. Przyjęłam materiał idealnie sprężysto-plastyczny. Dla prętów o różnych przekrojach rozwiązałam problem skręcania wyrażony przez funkcje naprężeń Prandtla  $\Phi$  i opisany równaniem różniczkowym Poissona

$$\nabla^2 \Phi = -2\theta,$$

z warunkami brzegowymi  $\Phi = 0$ , gdzie  $\theta$  – to kąt skręcania na jednostkę długości; oraz obliczyłam intensywność odkształceń (wartość wypadkowego naprężenia stycznego)

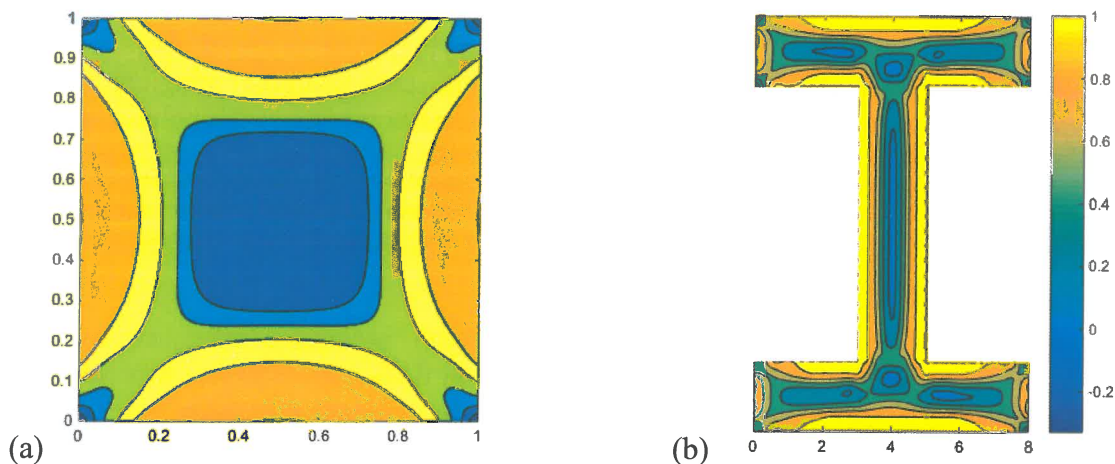
$$\tau = |\text{grad } \Phi| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}.$$

W ten sposób wyznaczałam zakres stref plastycznych w zależności od tego czy  $\tau$  jest większe czy też mniejsze niż 1 (bezwymiarowa granica plastyczności), co posłużyło jako punkt wejściowy do metody Newtona-Raphsona.

Następnie rozwiązałam układ równań uwzględniając strefę sprężystą (macierz Jakobiego  $\nabla^2 \Phi$ ) oraz plastyczną (macierz Jakobiego  $(\Delta \Phi_x \Phi_x + \Delta \Phi_y \Phi_y) / \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}$ ), i stosując dla aproksymacji pochodnych zależności wielopunktowe typu (3).

Na Rys. 16(a) przedstawiono rozkład stref uplastycznienia przy wzrastającym kącie skręcania  $\theta$  dla pręta o przekroju kwadratowym, na Rys. 16(b) – rozkład naprężeń dla dwuteownika.

W ten sposób sprawdzono algorytm i potwierdzono skuteczność metody wielopunktowej w zastosowaniu do zagadnień fizycznie nieliniowych.



**Rys. 16.** Skręcanie pręta przyzmatycznego: (a) granica plastyczności przy kącie skręcania  $\theta = 1.2, 1.5, 1.8, 2.1$  dla pręta o przekroju kwadratowym; (b) rozkład naprężeń dla dwuteownika, strefa plastyczna zaznaczona kolorem żółtym [A9]

#### 4.4.5 Podsumowanie

W badaniach, obejmujących przedstawiony cykl publikacji, rozwinęłam nową bezsiatkową metodę wyższego rzędu – wielopunktową BMRS na bardziej wymagające zagadnienia inżynierskie, takie jak zadania związane z homogenizacją numeryczną materiałów niejednorodnych oraz analizę problemów nieliniowych zarówno geometrycznie, jak i fizycznie. Opracowałam sformułowania, algorytmy; wykryłam i zbadałam występujące osobliwości (cechy charakterystyczne) metody w poszczególnych typach złożonych zagadnień; napisałam, przetestowałam i zastosowałam odpowiednie oprogramowanie.

Jak każda metoda, wielopunktowa BMRS ma swoje wady i zalety, zbadane i przetestowane w ramach mojej pracy, oraz opisane w artykule [A7] pod kątem rozpatrywanych w obecnych badaniach zagadnień. Jako zalety możemy wymienić następujące cechy:

- ze względu na wyższy rząd aproksymacji metody, odpowiedni wymagany poziom błędu uzyskujemy na znacznie rzadszej siatce, niż w przypadku standardowej BMRS czy MES;
- tempo zbieżności pochodnych uzyskanych za pomocą metody jest porównywalne z zbieżnością rozwiązania (dla porównania, w przemieszczeniowym sformułowaniu MES pochodne mają o rząd mniejsze tempo zbieżności niż rozwiązanie). Jest to szczególnie ważne w przypadku zagadnień inżynierskich, gdzie w postprocessingu poszukiwane są głównie pochodne – naprężenia, odkształcenia, itp.;
- w metodzie wielopunktowej, podobnie jak w klasycznej BMRS, przy wyprowadzeniu operatorów różnicowych od razu uzyskujemy operatory lokalne (w obrębie gwiazdy różnicowej) dla całego zbioru pochodnych, aż do przyjętej w aproksymacji pochodnej  $p$  (7). Globalne zależności typu (3) w podejściu ogólnym metody wielopunktowej zawsze mamy dla pochodnych pierwszego rzędu, a też (w zależności od stosowanej wersji metody) dla drugiego. Pochodne wyższych rzędów łatwo uzyskujemy poprzez składanie pochodnych rzędów niższych. Dokładność tak uzyskanych pochodnych jest bardzo dobra;
- wyprowadzone operatory wielopunktowe zależą wyłącznie od dyskretyzacji obszaru (rozmieszczenia węzłów) i nie zależą od typu rozwiązywanego zagadnienia, co pozwala analizować szereg złożonych zadań, w tym związanych z postprocessingiem czy analizą błędów, występujących w badanym obszarze bez dodatkowych kosztów obliczeniowych;
- uzyskane w sformułowaniu ogólnym metody wielopunktowej zależności pochodnych od funkcji niewiadomej w całym obszarze pozwalają na nie zbyt skomplikowane rozwiązywanie szerokiej klasy problemów złożonych, np. nieliniowych czy wieloskalowych;
- w przypadku rozwiązywania zagadnień nieliniowych, obliczenia macierzy Jakobiego są znacznie uproszczone poprzez stosowanie iloczynu dwóch macierzy, z których pierwsza jest obliczana w sposób analityczny (symboliczny), natomiast druga zależy tylko od dyskretyzacji i obliczonego operatora wielopunktowego;
- ze względu na wyższy rząd aproksymacji i doskonałe wyniki, metoda jest dobrym narzędziem analizy błędów, gdzie rozwiązanie wyższego rzędu jest traktowane jako rozwiązanie odniesienia;
- przynależność do klasy metod bezsiatkowych powoduje bardzo proste zagęszczenie, dopasowanie i modyfikację siatki do obszaru.

Do wad możemy odnieść to, że:

- w porównaniu z standardową BMRS metoda wielopunktowa wydaje się być bardziej wymagająca co do jakości wygenerowanej siatki węzłów (która ze względu na wyższy rząd aproksymacji może być znacznie rzadsza). Szczególnie ważne jest odpowiednie gładkie przejście pomiędzy strefą gęstą i rzadką. Generator siatek typu Liszki jest tutaj optymalnym rozwiązaniem. Dobre wyniki uzyskano również za pomocą generatora siatek Netgen;
- globalna zależność pomiędzy pochodną a funkcją niewiadomą w podejściu ogólnym powoduje, że obliczenia w całym obszarze dotyczą macierzy raczej pełnych, niż pasmowych;
- wadą sformułowania ogólnego metody jest mnogość wariantów, spośród których trzeba wybrać optymalny dla konkretnego zagadnienia i sytuacji;
- za wadę można uznać także konieczność odpowiedniego doboru kryterium generacji gwiazd różnicowych, zwłaszcza przy homogenizacji, na granicy pomiędzy różnymi rodzajami materiałów w mikrostrukturze.

Uzyskane wyniki badań wyglądają zachęcająco i przedstawiają potencjalną potęgę nowej wielopunktowej BMRS jako dokładnego i szybkiego (ze względu na możliwość wykorzystania rzadkich siatek) narzędzia rozwiązywania szerokiej klasy zagadnień brzegowych, w tym bardziej wymagających zagadnień nieliniowych i homogenizacji, jak również doskonałe narzędzie analizy błędów i adaptacji. Metoda może być stosowana zarówno jak samodzielna, tak i łączona z innymi metodami, np. z MES – w części obszaru, wymagającego adaptacji czy remeshingu, lub na etapie analizy – np. oszacowania błędów.

#### 4.4.6 Związek moich badań z dyscypliną budownictwo

Temat badań, wymienionych w cyklu publikacji ma ścisły związek z dyscypliną budownictwo. Dotyczy on numerycznego modelowania zarówno rozmaitych procesów (mechanicznych, termicznych i in.) zachodzących w konstrukcjach inżynierskich, jak i szeroko wykorzystywanych w budownictwie materiałów niejednorodnych. Rozwiązanie analityczne takich zagadnień jest możliwe tylko w prostych przypadkach. Z tego powodu wciąż rozwijane są odpowiednie metody i narzędzia numeryczne, pozwalające otrzymywać rozwiązania przybliżone dla coraz to bardziej złożonych problemów.

Przedstawiony cykl publikacji obejmuje rozwijanie narzędzia modelowania numerycznego, pozwalającego na bardziej dokładne i efektywne rozwiązywanie zagadnień z zakresu inżynierii lądowej.

Rozwinięta metoda wielopunktowa może być doskonałą alternatywą szeroko stosowanej w budownictwie MES. Łączy ona zalety wysokiej jakości rozwiązania, łatwości modyfikacji siatki, ważnej w przypadku procesu adaptacyjnego poprawiania dyskretyzacji i skomplikowanych obszarów (zagadnienia propagacji rys, modelowania materiałów niejednorodnych), a także możliwości zastosowania do analizy szerokiej klasy złożonych zagadnień inżynierskich wraz z analizą błędów. Dużą zaletą rozwijanej metody w wersji ogólnej jest jej uniwersalność – wyprowadzone podstawowe zależności pochodnych od funkcji niewiadomych zależą wyłącznie od dyskretyzacji obszaru, a nie od typu rozwiązywanego problemu.

W przytoczonych pracach analizowano zadania deformacji konstrukcji powłokowych, płytowych i prętowych, płaskiego stanu odkształcenia i naprężenia. Ze względu na



podobieństwo sformułowania matematycznego, dotyczy to również zagadnień ustalonego i nieustalonego przepływu ciepła. Część prac obejmuje modelowanie numeryczne materiałów niejednorodnych (problematyka obecnie intensywnie rozwijana), takich, jak np. materiałów strukturalnych lub kompozytowych, szeroko stosowanych w budownictwie. Metoda wielopunktowa sprawdziła się jako bardzo dobre narzędzie homogenizacji.

W kolejnych badaniach planowane jest połączenie obu części – analizy zagadnień nieliniowych oraz analizy materiałów niejednorodnych, służące do modelowania numerycznego np. mechaniki betonu.

#### 4.5 Cykl publikacji z omówieniem i wyszczególnieniem elementów oryginalnych

Poniżej przedstawiłam krótki opis publikacji z wyszczególnieniem moich elementów oryginalnych, dokonanych po doktoracie.

[A1] **Jaworska I.**, Higher Order Multipoint Meshless FDM for Two-scale Analysis of Heterogeneous Materials, *Int. J. Multiscale Comput. Eng.*, DOI: 10.1615/IntJMCompEng.2019028866, 2019. (IF =1.016, MNiSW(A) = 25 pkt), udział własny – 100%

Opracowanie modelu numerycznego zastosowania wielopunktowej BMRS w zagadnieniu homogenizacji numerycznej materiałów niejednorodnych.

##### Moje elementy oryginalne w pracy:

- sformułowanie zastosowania wielopunktowej BMRS w zagadnieniu dwuskalowej analizy materiałów niejednorodnych;
- opracowanie szczegółowego algorytmu homogenizacji materiału niejednorodnego za pomocą wielopunktowej BMRS w skali zarówno makro, jak i mikro;
- dobór efektywnego wariantu metody oraz kryterium generacji gwiazd różnicowych dla obydwu skal;
- przetestowanie i potwierdzenie ważności dopasowania gwiazdy różnicowej do inkluzji w RVE;
- analiza numeryczna zastosowania wielopunktowej BMRS dla różnych typów i rozmiarów RVE;
- porównanie zbieżności uzyskanych efektywnych stałych materiałowych z wynikami uzyskanymi za pomocą MES;
- analiza uśrednionego tensora sztywności dla materiałów anizotropowych przy różnych warunkach brzegowych za pomocą metody wielopunktowej;
- porównanie obliczonych uśrednionych tensorów sztywności z wynikami uzyskanymi za pomocą MES, BMRS, oraz homogenizacji asymptotycznej;
- weryfikacja uzyskanych wyników homogenizacji z wykorzystaniem warunku Hilla-Mandela oraz średniej arytmetycznej i harmonicznej;
- oprogramowanie zagadnienia w środowisku Visual Studio C++.

[A2] **Jaworska I.**, Orkisz J., On Nonlinear Analysis by the Multipoint Meshless FDM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.92, 231-243, 2018. (IF =2.138, MNiSW(A) = 35 pkt), udział własny – 90%

Sformułowanie i opracowanie modelu numerycznego zastosowania wielopunktowej BMRS do zagadnień nieliniowych. Analiza koncepcji obliczeń pochodnych stosowanych w podejściu wielopunktowym poprzez składanie.

Moje elementy oryginalne w pracy:

- analiza koncepcji obliczeń pochodnych mieszanych i wyższych rzędów poprzez składanie w podejściu wielopunktowym;
- opracowanie przyrostowo-iteracyjnego modelu numerycznego zastosowania metody wielopunktowej do zagadnień nieliniowych;
- szczegółowy schemat blokowy algorytmu;
- opracowanie koncepcji „staggered scheme” z zastosowaniem metody wielopunktowej do rozwiązania zadania 4go rzędu;
- wyprowadzenie odpowiednich wzorów;
- analiza błędów a posteriori z zastosowaniem metody wielopunktowej (typu  $p$ -) na siatce regularnej i nieregularnej;
- opracowanie programu w środowisku MATLAB z uwzględnieniem modelu wymiany danych z programem C++.

[A3] **Jaworska I.**, On some aspects of the Meshless FDM application for the heterogeneous materials, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 15(4): 359–378, 2017. (IF =1.016, MNiSW(A) = 25 pkt), udział własny – 100%

Kontynuacja badań (rozpoczętych w [A8]) cech charakterystycznych BMRS w zastosowaniu do homogenizacji numerycznej materiałów niejednorodnych. Analityczne potwierdzenie spełnienia warunków ciągłości na granicy materiałów w skali mikro.

Moje elementy oryginalne w pracy:

- przeanalizowanie i analityczne potwierdzenie spełnienia warunków ciągłości na granicy materiałów w skali mikro przy zastosowaniu BMRS dla sformułowania zarówno słabego, jak i mocnego;
- analiza wpływu na wyniki w RVE dopasowania siatki i gwiazd do inkluzji;
- opis i uogólnienie cech charakterystycznych BMRS w zastosowaniu do zadań homogenizacji;
- analiza uśredniania w RVE efektywnych parametrów stałych materiałowych dla materiałów anizotropowych za pomocą BMRS;
- porównanie uśrednionego tensora sztywności dla RVE z inkluzjami o różnym kształcie z wynikami uzyskanymi za pomocą MES;
- weryfikacja uzyskanych wyników homogenizacji z wykorzystaniem średniej arytmetycznej i harmonicznej.

[A4] **Jaworska I.**, Milewski S., On two-scale analysis of heterogeneous materials by means of the meshless finite difference method, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 14(2): 113-134, 2016. (IF =1.095, MNiSW(A) = 25 pkt), udział własny – 60%

Opracowanie, sformułowanie i algorytm zastosowania BMRS w zagadnieniu homogenizacji numerycznej materiałów niejednorodnych.

Moje elementy oryginalne w pracy:

- współopracowanie sformułowania i opisu algorytmu homogenizacji materiału niejednorodnego w skali mikro za pomocą BMRS;
- wyprowadzenie części wzorów dla podejścia bazującego na pojedynczym RVE;
- analiza zastosowania BMRS dla różnych typów RVE;



- porównanie uzyskanych uśrednionych stałych materiałowych z wynikami uzyskanymi za pomocą MES;
- oprogramowanie zagadnienia w środowisku Visual Studio C++;
- opracowanie procedury postprocessingu z wykorzystaniem OpenGL.

[A5] **Jaworska I.**, Orkisz J., Higher order multipoint method – from Collatz to meshless FDM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 50: 341–351, 2015. (IF =1.862, MNiSW(A) =30 pkt), udział własny – 90%

Zwarte uogólnienie opisu metody wielopunktowej. Wykrycie, zbadanie i przetestowanie cech charakterystycznych metody wielopunktowej oraz porównanie z klasyczną BMRS i MES.

Moje elementy oryginalne w pracy:

- wyprowadzenie jednolitych uogólnionych wzorów opisujących idee metody wielopunktowej;
- wyprowadzenie operatorów wielopunktowych różnych rzędów aproksymacji dla pierwszych i drugich pochodnych w 1D i 2D dla siatki regularnej;
- porównanie tempa zbieżności MES i metody wielopunktowej;
- analiza zbieżności pochodnych;
- zbadanie efektywności metody.

[A6] **Jaworska I.**, On the ill-conditioning in the new higher order multipoint method, *Computers & Mathematics with Applications*, 66(3): 238-249, 2013. (IF =1.996, MNiSW(A) = 35 pkt), udział własny – 100%

Uogólnienie wariantów metody wielopunktowej (podejście ogólne) opracowanych w celu uniknięcia możliwości występowania złego uwarunkowania. Opracowanie nowej wersji z regularyzacją. Zbadanie, porównanie i przeanalizowanie efektywności różnych wersji.

Moje elementy oryginalne w pracy:

- zbadanie problemu występowania złego uwarunkowania;
- zaproponowanie kierunków działań w celu uniknięcia możliwości występowania osobliwości;
- opracowanie nowego sposobu uniknięcia złego uwarunkowania związanego z regularyzacją;
- oprogramowanie i przetestowanie wariantu metody wielopunktowej z regularyzacją w środowisku Visual Studio C++;
- analiza zbieżności proponowanych wariantów metody;
- wstępne oszacowanie poziomu błędów a priori metody wielopunktowej;
- zbadanie i porównanie względnego czasu obliczeniowego proponowanych wersji metody;
- przeanalizowanie efektywności proponowanych wariantów metody pod kątem czasu, pamięci obliczeniowej, stabilności oraz złożoności.

[A7] **Jaworska I.**, Application of the Multipoint Meshless FDM to Chosen Demanding Problems, *AIP Conference Proceedings*, 2078, 020071, 2019. (Scopus, WoS, MNiSW = 15 pkt), udział własny – 100%

Uogólnienie zastosowania wielopunktowej BMRS do zadań nieliniowych i homogenizacji numerycznej – cechy charakterystyczne, wady i zalety metody. Analiza zagadnień nieliniowych fizycznie.

Moje elementy oryginalne w pracy:

- uogólnienie zastosowania metody wielopunktowej do zadań nieliniowych i homogenizacji numerycznej;
- przeanalizowanie cech charakterystycznych, wad i zalet metody wielopunktowej w zastosowaniu do zagadnień nieliniowych i homogenizacji numerycznej;
- opracowanie *konceptji zastosowania* metody wielopunktowej dla zagadnień nieliniowych fizycznie;
- opracowanie, oprogramowanie, i wykonanie przykładów zagadnień nieliniowych fizycznie.

[A8] **Jaworska I.**, On application of the meshless finite difference method to numerical homogenization, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Eds.: M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, G. Stefanou, V. Plevris, Crete Island, Greece, 2417-2425, vol.2, 2016. (**Scopus, WoS, MNiSW = 15 pkt**), *udział własny – 100%*

Analiza występowania oscylacji wyników homogenizacji numerycznej za pomocą BMRS na granicy łączenia materiałów w RVE. Zaproponowano i przetestowano wykorzystanie odpowiednich gwiazd różnicowych.

Moje elementy oryginalne w pracy:

- zbadano występowanie oscylacji przy homogenizacji numerycznej za pomocą BMRS na granicy materiałów w RVE i zależność amplitudy od liczby punktów Gaussa wykorzystanych do całkowania;
- zaproponowano i przetestowano wykorzystanie odpowiednich gwiazd różnicowych, zawierających węzły należące tylko do jednego materiału;
- dobrano i oprogramowano odpowiednie kryterium generacji takich gwiazd różnicowych;
- przygotowanie odpowiednich procedur w środowisku Visual Studio C++.

[A9] **Jaworska I.**, Orkisz J. On the multipoint meshless FD method using the local Petrov-Galerkin approach, CD-ROM Proceedings of the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Eds.: Eberhardsteiner, J.; Böhm, H.J.; Rammerstorfer, F.G., Publisher: Vienna, 6582–6591, 2012. (**Scopus, MNiSW = 15 pkt**), *udział własny – 90%*

Kompleksowe opracowanie i przetestowanie algorytmu łączenia metody wielopunktowej i sformułowania lokalno-globalnego Petrowa-Galerkina MLPG5. Porównanie MLPG5 z innymi sformułowaniami stosowanymi w metodzie wielopunktowej.

Moje elementy oryginalne w pracy:

- opracowanie modelu numerycznego zastosowania metody wielopunktowej w sformułowaniu lokalno-globalnym MLPG5;
- analiza głównych cech charakterystycznych sformułowania MLPG5 w zastosowaniu z wielopunktową BMRS (dokładność rozwiązania oraz skrócenie czasu obliczeń);
- przeprowadzenie analizy błędów metody wielopunktowej dla różnych sformułowań w zagadnieniu benchmarkowym z znanym rozwiązaniem analitycznym;
- przygotowanie programu w środowisku Visual Studio C++ do przetestowania metody w sformułowaniu MLPG5.

## 5 OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO - BADAWCZYCH

Oprócz głównego nurtu badań, obejmującego osiągnięcia przedstawione w rozdziale 4, zajmuję się również innymi tematami badawczymi. Interesują mnie zagadnienia, związane z:

- szeroko pojętą analizą błędów (a priori, a posteriori, adaptacją), którą zajmowałam się po uzyskaniu stopnia doktora – krótki opis wraz z wykazem innych prac naukowych (nie wchodzących w skład osiągnięcia) umieszczono w punkcie 5.1;
- grafiką komputerową, wizualizacją oraz postprocessingiem – jestem autorem nowej metody warstwicowania opisanej w publikacji (rozdziale książki) [ zał. 7, pkt. II.E.4] oraz innych pracach przed doktoratem. Metoda m.in. potencjalnie może służyć jako prostsza alternatywa metody Level-set, stosowanej np. w analizie propagacji rysy – planuję dalsze prace w tym kierunku. Idea mojej metody została wykorzystana do analizy MES w pracy doktorskiej w Indiach, której byłam recenzentem. Ponadto, występowałam jako konsultant w zakresie metod warstwicowania w firmie DrQ, zajmującej się projektami informatycznymi. Na zlecenie firmy również wykonałam projekt wizualizacji 3D dla zadania symulacji przejścia fali powodziowej.

W ramach grantu “Development of Advanced Methods for Theoretical Prediction of Shakedown Stress States and Physically Based Enhancement of Experimental Data”, US Department of Transportation, prowadzonego przez zespół byłego Zakładu L-6 na PK, stworzyłam program wizualizacji wyników dla adaptacyjnej analizy MES/BMRS. Program ten jest nadal rozwijany (m.in. podczas współpracy z firmą Neostrein) i stosowany w mojej pracy badawczej i dydaktycznej;

- analizą zagadnień inżynierskich za pomocą innych, niż bezsiatkowe, metod obliczeniowych, takich jak metoda elementów skończonych – wykonywałam obliczenia MES zagadnienia przepływu masy i ciepła w materiałach porowatych (silos) oraz analizy naprężeń w wózkach widłowych, wykonywanej na zlecenie fabryki-producenta. W ramach stażu w Instytucie Tele- i Radiotechnicznym (ITR) w Warszawie zajmowałam się rozwojem oprogramowania do analizy metodą elementów skończonych.

Wyniki moich badań były wielokrotnie prezentowane na zakładowych, instytutowych seminariach, w ramach Sekcji Metod Komputerowych Mechaniki Komitetu Mechaniki PAN, na uczelniach polskich (AGH, Politechnika Łódzka) i zagranicznych (INSA Lyon, TU Wien).

Poniżej przedstawiłam zestawienie mojej aktywności naukowej po doktoracie, obejmujące pozostałe publikacje, udział w konferencjach i projektach, staże zagraniczne, recenzowanie publikacji naukowych, członkostwo w organizacjach naukowych. Oprócz tego opisałam szczegóły mojej aktywności dydaktycznej i organizacyjnej, odbyte szkolenia i certyfikaty, a także uzyskane nagrody i wyróżnienia.

### 5.1 Pozostały dorobek naukowy po doktoracie

Pozostały dorobek naukowy opublikowany po uzyskaniu stopnia doktora dotyczy przede wszystkim zagadnień związanych z analizą błędów – która jest bardzo ważną częścią obliczeń numerycznych.

Zazwyczaj, dokładne rozwiązanie analizowanego problemu nie jest znane, dlatego możemy wykonać tylko oszacowanie błędu. Takie oszacowanie służy zarówno do oceny dokładności otrzymanego rozwiązania, jak i do poprawy wydajności obliczeniowej – kiedy jest ono stosowane jako podstawa procesu adaptacyjnego (zagęszczenie lub modyfikacja siatki). Rozwijana przeze mnie metoda wielopunktowa, ze względu na wyższy rząd aproksymacji, może służyć jako narzędzie uzyskania rozwiązania odniesienia, wykorzystywanego zamiast

rozwiązania analitycznego przy oszacowaniu błędów rozwiązania i residuum. W badaniach zajmowałam się głównie oszacowaniem błędu a posteriori [B1], [B3], otrzymywanym po rozwiązaniu problemu, aczkolwiek dokonałam również wstępnej analizy błędu a priori [B2], który zawiera informację o asymptotycznym zachowaniu się błędu związanego z dyskretyzacją. Wyprowadzeniu oszacowania błędu a priori dla metody wielopunktowej zostanie poświęcony kolejny artykuł mojego autorstwa, który planuję złożyć do czasopisma z listy JCR.

Oprócz różnych aspektów związanych z oszacowaniem błędu z wykorzystaniem metody wielopunktowej, podjęłam się próby opisu i klasyfikacji analizy błędów w różnych metodach bezsiatkowych, również w porównaniu z MES. Ze względu na ograniczenia wydawnicze do 7 stron [B2], najszerzej ten temat zreferowano na międzynarodowej konferencji CMM-17, gdzie został zakwalifikowany jako Keynote Lecture.

Najnowsze osiągnięcia bezsiatkowej metody różnic skończonych z ostatnich 10 lat wraz z opisem historii rozwoju BMRS, oraz metodę na tle popularnej MES, przedstawiono w rozdziale monografii [B4]. Uogólniono m.in. rozmaite sformułowania globalne (wariacyjne) oraz lokalno-globalne (MLPG), stosowane wraz z BMRS i jej modyfikacjami wyższego rzędu, w tym z metodą wielopunktową; dokonano porównawczej analizy aproksymacji metodą ważonych najmniejszych kwadratów dla BMRS i jej rozszerzeń.

### 5.1.1 Publikacje

#### Artykuły w czasopismach JCR, bazach WoS i Scopus

- [B1] **Jaworska I.**, Orkisz J., Estimation of a posteriori computational error by the higher order multipoint meshless FDM, *Computing and Informatics*, Vol. 36, 1447–1466, 2017. (IF 0.41, lista A MNiSW 15)

*udział własny – 90%*

- [B2] **Jaworska I.**, On the error analysis of the meshless FDM and its multipoint extension, AIP Conference Proceedings, 1922, 040008, 2018. (WoS, Scopus)

a. **Jaworska I.**, On the error analysis of the Meshless FDM and its Multipoint extension, CMM-2017, eds. T. Burczyński [et al.], Lublin: LUT, 2017, ISBN 978-83-7947-264-2

*udział własny – 100%*

- [B3] **Jaworska I.**, Orkisz J. On some aspects of a posteriori error estimation in the multipoint meshless FDM, WCCM XI, Eds: E. Oñate, J. Oliver and A. Huerta, Barcelona, Spain, 2737-2743, 2014. (WoS, Scopus)

*udział własny – 90%*

#### Rozdział w monografii

- [B4] **Jaworska I.**, Milewski S., Recent advances in the meshless finite difference method, in *Recent advances in civil engineering: computational methods*, ed. by W. Cecot, Politechnika Krakowska, Kraków: Wydaw. PK, tom 481, 143-168, 2015.

*udział własny – 60 %*



**Publikacje recenzowane w materiałach konferencyjnych (rozdziały w monografiach wg bazy PBN (Polska Bibliografia Naukowa))**

- [B5] **Jaworska I.**, Orkisz J., On the application of multipoint meshless method to the nonlinear analysis, Proceedings of the 21st International Conference on Computer Methods in Mechanics (CMM-2015), eds. M. Kleiber [et al.], Gdańsk: Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics, 2015, ISBN 978-83-932107-5-6.  
*udział własny – 90%*
- [B6] **Jaworska I.**, Orkisz J., A posteriori error estimation using Multipoint meshless, Computer Methods in Mechanics CMM-2013, eds. T. Łodygowski [et al.], Poznań: PUT, 2013, ISBN 978-83-89333-51-3. *udział własny – 80%*
- [B7] **Jaworska I.**, Orkisz J., MLPG Formulation of the Multipoint Meshless FDM, Computer Methods in Mechanics CMM-2011, eds. A. Borkowski, T. Lewiński, G. Dzierżanowski, Warsaw: Publishing House WUT, 2011, ISBN 978-83-7207-943-5  
*udział własny – 90%*
- [B8] Orkisz J., **Jaworska I.**, Multipoint meshless FDM for weak formulations of boundary value problems, Computer Methods in Mechanics CMM-2009, eds. M. Kuczma [et al.]. - Zielona Góra : Univ. Ziel. Góra Press, 2009, ISBN 978-83-7481-245-0.  
*udział własny – 60%*

### 5.1.2 Referaty na konferencjach międzynarodowych

- [C1] **Jaworska I.**, 2018, Higher Order Multipoint Meshless FDM for Two-scale Analysis of Heterogeneous Materials, 13th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XIII) and 2nd Pan American Congress on Computational Mechanics (PANACM II), July 22-27, New York City, NY, USA
- [C2] **Jaworska I.**, 2017, On the error analysis of the Meshless FDM and its Multipoint extension, CMM-2017, eds. T. Burczyński [et al.], Lublin, Poland.
- [C3] **Jaworska I.**, 2016, On application of the meshless finite difference method to numerical homogenization, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering - ECCOMAS Congress 2016, June 5-10, Crete Island, Greece.
- [C4] **Jaworska I.**, Orkisz J., 2015, On the application of multipoint meshless method to the nonlinear analysis, Proceedings of the 21st International Conference on Computer Methods in Mechanics (CMM-2015), Gdańsk, Poland
- [C5] **Jaworska I.**, Orkisz J., 2014, On some aspects of a posteriori error estimation in the multipoint meshless FDM, WCCM XI, E. Oñate, J. Oliver and A. Huerta (Eds), Barcelona, Spain.
- [C6] Orkisz J., **Jaworska I.**, Magiera J., Milewski S., Pazdanowski M., 2014, Meshless Finite Difference Method–State of the Art, 11th World Congress on Computational Mechanics, E. Oñate, J. Oliver and A. Huerta (Eds), Barcelona, Spain.
- [C7] **Jaworska I.**, Orkisz J., 2013, A posteriori error estimation using Multipoint meshless, Computer Methods in Mechanics CMM-2013, August 27–31, Poznań, Poland
- [C8] **Jaworska I.**, Orkisz J., 2012, On the multipoint meshless FD method using the local Petrov-Galerkin approach, Book of abstract 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Vienna University of Technology Vienna, ISBN 978-3-9502481-8-0

- [C9] **Jaworska I.**, Orkisz J., 2011, MLPG Formulation of the Multipoint Meshless FDM, *CMM-2011 – Computer Methods in Mechanics*, Warsaw, Poland.
- [C10] **Jaworska I.**, 2011, On Regularization Aided HO Multipoint Solution Approach, *HOFEIM 2011*, Krakow, Poland.
- [C11] **Jaworska I.**, Orkisz J., 2010, Generalization of the Multipoint FDM on Arbitrarily Irregular Meshes, *ECCM2010*, Paris.
- [C12] Orkisz J., **Jaworska I.**, 2009, Multipoint meshless FDM for weak formulations of boundary value problems, *18<sup>th</sup> International Conference on Computer Methods in Mechanics CMM-2009*, May 18–21, Zielona Góra, Poland.
- [C13] **Jaworska I.**, Orkisz J., 2009, Multipoint approach in the global formulation of the b.v. problem, *ICCES Special Symp. on Meshless Methods 2009*, Ljubljana, Slovenia.
- [C14] **Jaworska I.**, Orkisz J., 2009, Global Formulations of the Multipoint Meshless FDM, *17<sup>th</sup> Institute Seminar for Young Researchers*, May 22-23, Kraków, Poland.

### 5.1.3 Referaty na konferencjach krajowych

- [C15] **Jaworska I.**, 2018, Application of the Multipoint Meshless FDM to Chosen Demanding Problems, *TKI – 2018*, Mikołajki, Poland;
- [C16] **Jaworska I.**, Orkisz J., 2016, On Nonlinear Analysis by the Multipoint Meshless FDM, [KUKDM 2016]: Ninth ACC Cyfronet AGH HPC Users' Conference, eds. K. Wiatr, J. Kitowski, M. Bubak, Kraków: ACC Cyfronet AGH, p.21-22, ISBN 978-83-61433-18-7
- [C17] **Jaworska I.**, Orkisz J., 2015, Estimation of a posteriori Computational Error by the Higher Order Multipoint Meshless FDM, [KUKDM 2015]: Eighth ACC Cyfronet AGH Users' Conference, eds. K. Wiatr, J. Kitowski, M. Bubak, Kraków: ACC Cyfronet AGH, ISBN 978-83-61433-12-5

## 5.2 Udział w projektach

### 5.2.1 Projekty naukowe

1. "Wieloskalowe modelowanie niesprężystych materiałów heterogenicznych za pomocą hp-adaptacyjnej metody elementów skończonych", projekt badawczy MNiSW: N N506 369734, (kierownik prof. W. Cecot), 2008-2010 – wykonawca;
2. "Wizualizacja i analiza błędów danych pomiarowych oraz wyników obliczeń modeli numerycznych wybranych istniejących konstrukcji inżynierskich", Małopolska Agencja Rozwoju Regionalnego (MARR/735/2011/DZPP, w ramach Priorytetu VIII Regionalne kadry gospodarki. Działania 8.2 Transfer wiedzy), 2011 – kierownik i główny wykonawca;
3. "Development of Advanced Methods for Theoretical Prediction of Shakedown Stress States and Physically Based Enhancement of Experimental Data", projekt badawczy US Department of Transportation, (DT FR 53-95-G-00055, DT FR 53-03-G-00012, DT RT 57-05-P-80149), 2000-2006 – wykonawca;
4. Udział w projektach realizowanych w ramach działalności statutowej i badań własnych, finansowanie Politechnika Krakowska, 2008-2018, m.in:



- Uogólnienia wielopunktowej metody różnic skończonych, projekt badawczy własny (L-5/365/BW/08) oraz kontynuacja (L-5/438/BW/09) – kierownik;
- Rozwijanie metod i programów komputerowych do modelowania zagadnień inżynierii lądowej – kontynuacja, „grant dziekański” w ramach umowy (L-5/67/2018/DS).

### **5.2.2 Projekty – współpraca z przemysłem i innymi podmiotami zewnętrznymi**

1. Współpraca z firmą Neostrain w zakresie wizualizacji i analizy błędów danych pomiarowych oraz wyników obliczeń systemu górnego (odkształcenia geosiatki) i pracy systemu dolnego (przemieszczenia pionowe) monitorowanego przez firmę Neostrain odcinka autostrady A1 (związana z projektem 2 z poprzedniego punktu).
2. Udział w projektach firmy MM InterActive:
  - „Wawel 1000 lat temu”, ISBN: 978-83-911438-1-0, 2012, DVD;
  - „Kraków 1000 lat temu – wirtualna rekonstrukcja”, 2006, DVD;
  - „Wirtualna rekonstrukcja Krakowa – okres romański”, 2000, CD-ROM;
  - „Wirtualna rekonstrukcja Wawelu – okres romański”, MM Interactive, Zamek Królewski na Wawelu, 2000, , CD-ROM, nagroda Ministra Kultury i Dziedzictwa Narodowego „Wydarzenie Muzealne Roku 2000”
3. „Wizualizacja 3D dla zadania symulacji przejścia fali powodziowej”, firma DrQ, 2005; również konsultacja w zakresie metod warstwiciowania, 2003.
4. Projekt “The calculations of the stressed deformed state for the panoramic freight hoist” wykonany na zlecenie fabryki-producenta wózków widłowych, 1993.

### **5.2.3 Inne projekty**

1. Projekt "Rozwój potencjału dydaktycznego Politechniki Krakowskiej w zakresie nowoczesnego budownictwa" (2009–2015) współfinansowany przez UE w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego realizowany pod nadzorem MNiSW: przygotowanie i prowadzenie zajęć
  - szkoleniowych „Metody komputerowe w budownictwie” dla praktykujących inżynierów;
  - dydaktycznych w języku angielskim.
2. Projekt „Rozwój potencjału dydaktycznego Politechniki Krakowskiej – studia podyplomowe, szkolenia, kursy” współfinansowany przez UE w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego realizowany pod nadzorem MNiSW:
  - koordynacja, przygotowanie i prowadzenie szkoleń dla inżynierów „AutoCAD dla zaawansowanych”;
  - koordynacja, przygotowanie i prowadzenie szkoleń dla inżynierów „Modelowanie komputerowe zagadnień inżynierskich w programie MATLAB”;
  - koordynator szkoleń dla inżynierów „Wprowadzenie do programu Revit”.

### **5.3 Staże zagraniczne**

- 1-30.08.2013    Institut für Analysis und Scientific Computing, TU WIEN
- 2-30.09.2011    CREATIS, INSA Lyon

## 5.4 Recenzowanie publikacji naukowych

### Recenzent w czasopismach naukowych:

- Computers & Mathematics with Applications (IF 1.860)
- Journal of Composite Materials (IF: 1.613)
- Journal of the Institution of Engineers (India): Series B (Springer)

### Recenzent pracy doktorskiej:

PhD in Mechanical Engineering:

J. S. Saini, Accurate and fast algorithms for contour plotting in 2D and 3D domains for Finite Element Analysis (FEA) data, Thapar University, India, 2011

## 5.5 Członkostwo w organizacjach naukowych

PTMKM - Polskie Towarzystwo Metod Komputerowych Mechaniki

## 5.6 Osiągnięcia dydaktyczne i organizacyjne

### 5.6.1 Osiągnięcia dydaktyczne

Moja działalność dydaktyczna na Wydziale Inżynierii Lądowej obejmuje:

1. Prowadzenie wykładów i zajęć laboratoryjnych na studiach stacjonarnych, niestacjonarnych i pojedynczych zajęć na studiach doktoranckich. Dotyczy to takich przedmiotów jak: *Informatyka, Technologie informacyjne, Grafika inżynierska i systemy multimedialne, Matematyka stosowana i metody numeryczne* (opracowanie i prowadzenie wykładu), *Metody obliczeniowe; Computer graphics for engineering, Applied mathematics and numerical methods*.
2. Opracowanie autorskiego przedmiotu *Grafika komputerowa* dla specjalności Informatyka w Inżynierii Lądowej (2004-2009), zmodyfikowanego później jako *Grafika komputerowa w zastosowaniu do obliczeń inżynierskich* dla specjalności Budownictwo – przedmiot wybieralny, który cieszy się dużym powodzeniem wśród studentów.
3. Opracowanie i prowadzenie zajęć szkoleniowych „Metody komputerowe w budownictwie”, „Modelowanie komputerowe zagadnień inżynierskich w programie MATLAB”, „AutoCAD dla zaawansowanych” w ramach projektów "Rozwój potencjału dydaktycznego Politechniki Krakowskiej..." (wymienionych w punkcie 5.2.3);  
prowadzenie szkoleń i konsultacji AutoCAD dla studentów Politechniki Krakowskiej w ramach umowy z firmą BIŚ computers.
4. Jestem promotorem i recenzentem kilkunastu prac magisterskich i inżynierskich.
5. Opieka nad Kołem Naukowym Zastosowań Informatyki działającym przy Instytucie Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej L-5, którym od założenia w 2009 roku nieprzerwanie się opiekowałam do roku 2019. Koło, m.in., wystąpiło współorganizatorem międzyuczelnianego spotkania popularyzującego naukę World Usability Day Tour, było inicjatorem szkoleń z zakresu oprogramowania CAD/BIM. W roku 2015 koło (wraz z grupą studentów z Koła Naukowego BIM z Wydziału Architektury) pod moją opieką brało udział w Międzynarodowym Konkursie Budowy Mostów z Makaronu RECCS (World Championship in Spaghetti Bridge Building) na Óbuda University w Budapeszcie, gdzie rywalizowało z 26 drużynami z 6 krajów. Warto

zaznaczyć, że ekipy z PK były pierwszymi drużynami z Polski, biorącymi udział w konkursie organizowanym od 10 lat. Członkowie Koła odnoszą znaczące sukcesy na Sesjach Kół Naukowych oraz konferencjach studenckich „Euroinżynier” (kilkanaście prac nagrodzonych), reprezentują Instytut L-5 podczas Dnia Otwartego WIL, a także Wydział Inżynierii Lądowej podczas Festiwalu Nauki w Krakowie.

6. Wyjazd monitoringowy w ramach programu Erasmus (czerwiec 2018) do University of Algarve, Faro, Portugalia związany z wymianą studentów.

### **5.6.2 Działalność organizacyjna**

#### **Udział w komitetach organizacyjnych konferencji:**

- Workshop on Higher Order Finite Element and Isogeometric Methods (HOFEIM) 2011 – Kraków, PK, czerwiec 2011;
- 17th Inter-Institute Seminar 2009 (Kraków-Wiedeń-Budapeszt) – Kraków, PK, maj 2009.

#### **Udział w komitetach redakcyjnych czasopism**

- Mathematical methods and Physicomechanical fields, Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki im. Pidstryhacza Akademii Nauk Ukrainy, Lwów, 1997-1998

#### **Inne**

- Prace graficzne na rzecz WIL PK (projekt roll-upu jubileuszowego ) i Instytutu L-5 (loga Instytutu L-5, byłego Zakładu L-6, Koła naukowego);
- Członek Wydziałowej Komisji Rekrutacyjnej w roku akademickim 2002/2003.

### **5.7 Szkolenia i certyfikaty**

- 2005 Studium pedagogiczne dla asystentów, Politechnika Krakowska, Kraków;
- 2009 „hp-adaptive Finite Element Methods”, kurs prof. L. Demkowicza;
- 2009 Multiscale Computer Modeling in Mechanics of Materials and Structures;
- 2012 certyfikat AutoCAD Autodesk Certified Professional;
- 2015 Wykorzystanie Pythona w obliczeniach naukowych, Cyfronet, AGH;
- 2015 „hp-adaptive Finite Element Methods, DPG”, kurs prof. L. Demkowicza;
- 2016 Wykorzystanie systemu obliczeń symbolicznych do automatycznej generacji kodu, Cyfronet, AGH;
- 2016 Nanomechanika Materiałów i Struktur Materiałowych, kurs prof. G. Szefera.

### **5.8 Nagrody i odznaczenia**

- 2009 – nagroda w konkursie na najlepszą pracę doktorską Akademickiego Centrum Komputerowego Cyfronet AGH;
- 2015 – Honorowa Odznaka Politechniki Krakowskiej, nadana Uchwałą Senatu Politechniki Krakowskiej z dnia 27 marca 2015 r.

*Irena Jaworska*